Séquence 1. SUITES NUMÉRIQUES

Objectifs :

- ❖ Connaitre et utiliser la définition d'une suite
- ❖ Étudier la convergence d'une suite
- ❖ Déterminer la limite d'une suite lorsqu'elle existe
- ❖ Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite
- ❖ Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par des suites

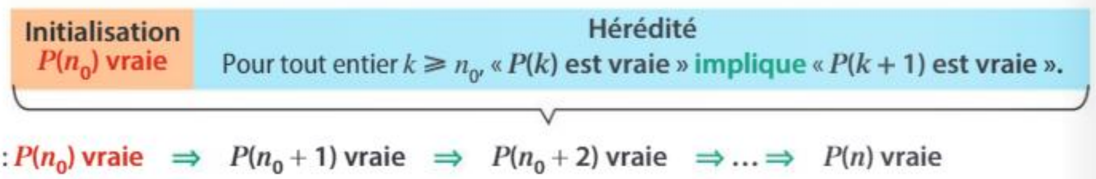
I. LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Une propriété est une phrase mathématique, écrite ou non avec des symboles mathématiques qui peut être soit vraie soit fausse.
Lorsque cette propriété concerne un entier naturel n, on peut la noter $P(n)$

1) Principe de récurrence

$P(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel,
Si une propriété est vraie pour un entier n_0 , ($P(n_0)$ est vraie)
et s'il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour un entier naturel k supérieur ou égal à n_0 alors elle aussi vraie pour l'entier naturel $k+1$, ($P(k)$ est vraie implique $P(k+1)$ est vraie)
alors elle est vraie pour tous les entiers supérieurs ou égaux à n_0. ($P(n)$ est vraie)

Le schéma suivant illustre le principe de récurrence.



2) Raisonnement par récurrence

$P(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel,
Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie « pour tout $n \geq n_0$ », on commence par énoncer clairement la propriété au rang n puis on procède en trois étapes :

- Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie au rang initial n_0. ($P(n_0)$ est-elle vérifiée ?)
- Hérédité : On émet comme hypothèse de récurrence qu'il existe un entier $k \geq n_0$ tel que la propriété soit vraie et on prouve que sous cette hypothèse, la propriété est vraie au rang $(k+1)$.
- Conclusion : La propriété est vraie au rang n_0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

3) Exemple

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$

$P(n)$: $u_n = 2 - 3n$
On veut montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$

- Initialisation : $u_0 = 2$ et $2 - 3 \times 0 = 2$ donc $P(0)$ est vraie

- Hérédité :
On suppose qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie soit $u_k = 2 - 3k$
et on prouve que $P(k+1)$ est vraie soit $u_{k+1} = 2 - 3(k+1) = -1 - 3k$
On sait que par définition de la suite (u_n) , $u_{k+1} = u_k - 3$
Or $u_k = 2 - 3k$ donc $u_{k+1} = u_k - 3 = 2 - 3k - 3 = -1 - 3k$

- Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$

II. SUITES MAJORÉES, MINORÉES, BORNÉES

1) Sens de variation

On dit qu'une suite (u_n) est :
▸croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} \geq u_n$
▸décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} \leq u_n$
▸constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = u_n$

Remarque : Une suite monotone est une suite croissante ou décroissante
Voici les méthodes permettant d'étudier le sens de variation d'une suite

Méthode 1 (algébrique)	On étudie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$: • si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite (u_n) est croissante • si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite (u_n) est décroissante
Méthode 2 (algébrique)	On compare, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 : **!!! cette méthode est applicable uniquement si tous les termes de la suite sont strictement positifs !!!** • si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite (u_n) est croissante • si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite (u_n) est décroissante
Méthode 3 (fonctionnelle)	Si la suite (u_n) est définie par une relation explicite c'est-à-dire si la suite (u_n) est définie par une relation du type $u_n = f(n)$ alors on peut utiliser le sens de variation de la fonction f. Plus précisément : • si la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ alors la suite (u_n) est croissante • si la fonction f est décroissante sur $[0;+\infty[$ alors la suite (u_n) est décroissante
Méthode 4 (raisonnement par récurrence)	On montre par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ ou pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$

2) Suites majorées, minorées, bornées

La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
La suite (u_n) est bornée s'il existe deux réels M et m tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$

Remarque : Toute suite croissante est minorée par son 1[er] terme et toute suite décroissante est majorée par son 1[er] terme.

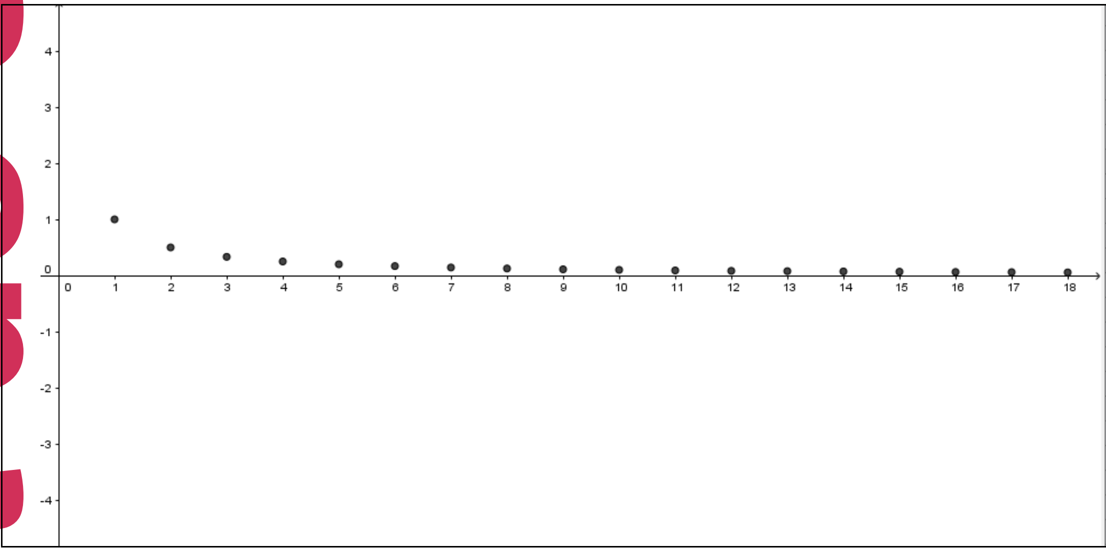
Exemple :
$u_n = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N},\ n+1 \geq 1$ donc $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$ donc la suite (u_n) est bornée

III. SUITE CONVERGENTE - SUITE DIVERGENTE

1) Suite convergente

Une suite (u_n) converge vers le réel L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

Exemple : Soit la suite (u_n) définie, pour $n \geq 1$, par $u_n = \frac{1}{n}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$



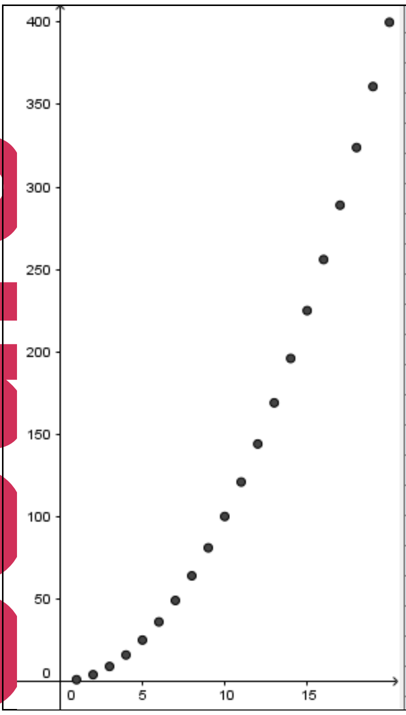
	A	B
1	n	u_n
2	1	1
3	2	0.5
4	3	0.33
5	4	0.25
6	5	0.2
7	6	0.17
8	7	0.14
9	8	0.13
10	9	0.11
11	10	0.1
12	11	0.09
13	12	0.08
14	13	0.08
15	14	0.07
16	15	0.07
17	16	0.06
18	17	0.06
19	18	0.06
20	19	0.05
21	20	0.05

Propriétés :
$\lim\limits_{n\to+\infty} k = k$ (k étant une constante) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
Si la suite (u_n) converge alors sa limite est unique.

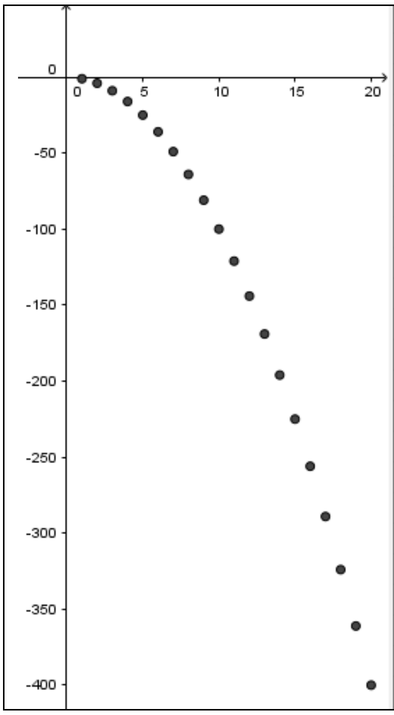
2) Suite ayant une limite infinie

Une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si tout intervalle du type $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
Une suite (u_n) diverge vers $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty;A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemples :
pour $n \geq 0$, par $u_n = n^2$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ pour $n \geq 0$, par $u_n = -n^2$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$



	A	B
1	n	u_n
2	0	0
3	1	1
4	2	4
5	3	9
6	4	16
7	5	25
8	6	36
9	7	49
10	8	64
11	9	81
12	10	100
13	11	121
14	12	144
15	13	169
16	14	196
17	15	225
18	16	256
19	17	289
20	18	324
21	19	361
22	20	400



	A	B
1	n	u_n
2	0	0
3	1	-1
4	2	-4
5	3	-9
6	4	-16
7	5	-25
8	6	-36
9	7	-49
10	8	-64
11	9	-81
12	10	-100
13	11	-121
14	12	-144
15	13	-169
16	14	-196
17	15	-225
18	16	-256
19	17	-289
20	18	-324
21	19	-361
22	20	-400

Propriétés :

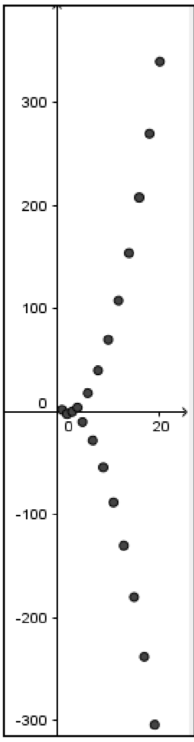
$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$

3) Suite n'ayant pas de limite :

Une suite (u_n) qui ne converge pas et qui n'a pas de limite infinie n'a pas de limite.

Exemple: pour $n \geq 0$, par $u_n = (-1)^n(n^2 - 3n)$ alors (u_n) n'a pas de limite



	A	B
1	n	u_n
2	0	0
3	1	2
4	2	-2
5	3	0
6	4	4
7	5	-10
8	6	18
9	7	-28
10	8	40
11	9	-54
12	10	70
13	11	-88
14	12	108
15	13	-130
16	14	154
17	15	-180
18	16	208
19	17	-238
20	18	270
21	19	-304
22	20	340

4) Suite divergente :

Une suite qui ne converge pas est divergente
Autrement dit, une suite qui a soit une limite infinie soit pas de limite est divergente.

IV. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

On considère deux suites (u_n) et (v_n) , L et L'deux réels. On note FI une forme indéterminée.

1) Limite d'une somme

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Dans le cas d'une FI, il faudra modifier l'écriture de $u_n + v_n$

2) Limite d'un produit

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$	L	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	0
Et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n)=$	L L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

3) Limite d'un quotient

On utilisera la règle des signes d'un quotient

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$	L	L	L > 0 ou $+\infty$	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	L < 0 ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
Et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=$	L'$\neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right)=$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

4) Formes indéterminées

Il y a quatre cas d'indétermination qui sont :
"$-\infty$ et $+\infty$ "par addition ; "0 et $\pm\infty$" par produit ; "0 et 0" par quotient ; "$\pm\infty$ et $\pm\infty$" par quotient
Pour lever une indétermination, on transforme l'écriture de l'expression pour se ramener aux théorèmes généraux.
On est souvent amené à mettre en facteur les termes de plus haut degré.

Exemple :

$u_n = n^2 - 4n + 1$, $n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-4n+1) = -\infty$

On est en présence de la forme indéterminée " $+\infty$ et $-\infty$ "

Pour lever l'indétermination, on factorise par n^2

On écrit alors : $u_n = n^2\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right), n \neq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

Donc en utilisant la règle sur la limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2 - 4n + 1) = +\infty$

V. LIMITES ET COMPARAISON

1) Limite infinie

Propriétés :

■si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :

$u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

■si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :

$u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Démonstration :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc il existe un entier n_1 tel que pour $n \geq n_1$ alors $u_n > A$ $(A > 0)$

De plus, il existe un entier n_2 tel que pour $n \geq n_2$ alors $u_n \leq v_n$

Soit N un entier supérieur ou égal à n_1 et n_2 alors pour $n \geq$ N, $A < u_n \leq v_n$

Soit pour $n \geq$ N, $v_n > A$, autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

2) Limite finie

Propriétés (théorème des gendarmes) :

(u_n) , (v_n), $(\mathrm{w_n})$ sont 3 suites telles que :

$u_n \leq v_n \leq \mathrm{w_n}$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \mathrm{L}$

Propriétés :

■si (u_n) , (v_n) sont 2 suites telles que :

$\leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L'$

Alors $L \leq L'$

■si (u_n) est croissante et converge vers L alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq L$

si (u_n) est décroissante et converge vers L alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq L$

VI. SUITE MONOTONE-SUITE GÉOMÉTRIQUE

1) Suites du type q^n

La suite de terme général $u_n = q^n, n \in \mathbb{N}$ est géométrique de raison q et de 1er terme $q^0 = 1$

- n'a pas de limite si $q \leq -1$
- converge vers 0 si $-1 < q < 1$
- diverge vers $+\infty$ si $q > 1$.
- Converge vers 1 si $q = 1$

Démonstration : ((u_n) diverge vers $+\infty$ si $q > 1$)

On admet que pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ (raisonnement par récurrence)

Soit $u_n = q^n$ *et* $q > 1$; on peut poser $q = 1 + \alpha$ avec $\alpha > 0$.

Alors $q^n = (1+\alpha)^n$; or $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + n\alpha) = +\infty$ car $\alpha > 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \alpha)^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Exemples :

$\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ car 3^n est de la forme q^n avec $q = 3 > 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (7 \times 0{,}6^n) = 0$ car $0{,}6^n$ est de la forme q^n avec $-1 < q = 0{,}6 < 1$

2) Suite monotone

Propriétés :

Toute suite (u_n) croissante et majorée par M converge vers L et $L \leq M$

Toute suite (u_n) décroissante et minorée par m converge vers L et $L \geq m$

Propriétés :

Si (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Si (u_n) décroissante et non minorée alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration :

Soit un réel A , (u_n) n'est pas majorée donc il existe au moins un entier p tel que $u_p > A$

(u_n) est croissante , on a donc pour $n \geq p$, $u_n \geq u_p$ donc pour $n \geq p$, $u_n > A$

Donc à partir d'un certain rang p tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A.+\infty[$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

-- EXERCICES D'APPLICATION --

Exercice 1 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$

Montrer par récurrence que $u_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 0$

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$

1) Calculer les 8 premiers termes de la suite
2) Quelle conjecture peut-on faire sur l'expression de u_n en fonction de n ?
3) Démontrer cette conjecture par récurrence

Exercice 3 :

Montrer par récurrence que pour $n \geq 1$ la somme des n premiers entiers est $\frac{n(n+1)}{2}$
soit $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$

Exercice 4 :

Étudier le sens de variations de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

Exercice 5 :

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 0$ par $u_n = n^2 - 9n - 20$
1) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4.Que peut-on remarquer ?
2) Étudier le sens de variations de la suite (u_n):
   a) en utilisant le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour $n > 4$
   b) en étudiant les variations de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 9x - 20$

Exercice 6 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$

Montrer par récurrence que (u_n) est croissante

Exercice 7 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $u_n = \frac{2n+1}{3n-1}$
Montrer que (u_n) est majorée par $\frac{3}{2}$

Exercice 8 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = 0{,}2u_n - 3 \end{cases}$
Montrer par récurrence que (u_n) est minorée par $-3{,}75$

Exercice 9 :

Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{n^2+1}{n^2+5}$ est bornée

Exercice 10 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $u_n = 5 - \frac{1}{n}$
1) Compléter le tableau suivant

n	1	10	100	1000
u_n				
$\|u_n - 5\|$				

2) Conjecturer le comportement de la suite (u_n) puis justifier la conjecture en utilisant la définition d'une suite

Exercice 11 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 0$, par $u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$

1) k étant un entier naturel quelconque, montrer qu'on peut trouver n tel que
$$1 - 10^{-k} < u_n < 1 + 10^{-k}$$
2) En déduire que (u_n) converge vers 1

Exercice 12 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 0$, par $u_n = -10\sqrt{n}$

1) Déterminer un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $u_n < -10^7$
2) Conclure

Exercice 13 :

Déterminer les limites des suites définies par :

1) $u_n = n^2 + 4n + 1, n \geq 0$
2) $v_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(-n + 3), n \geq 1$
3) $w_n = u_n v_n$, $n \geq 1$
4) $t_n = \frac{1}{u_n}, n \geq 0$

Exercice 14 :

Déterminer les limites des suites définies par :

1) $u_n = 2\sqrt{n} - n, n \geq 0$
2) $v_n = \frac{n^2+3n}{3n^2+4}, n \geq 0$
3) $w_n = \frac{n+3}{n^2-2}$, $n \geq 0$
4) $t_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(n + 2)$, $n \geq 1$

Exercice 15 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 0$, par $u_n = e^n$

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 0, e^n \geq n + 1$
2) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = -{v_n}^2 - n - 1 \end{cases}$

3) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0, v_n \leq -n$
4) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

Exercice 16 :

1) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $\frac{n}{3} \leq \frac{n}{2+cosn}$
2) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2+cosn}$

Exercice 17 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $u_n = \frac{\sin(n)+3\cos(n)}{n}$

1) Montrer que pour $n \geq 1, \frac{-4}{n} \leq \frac{\sin(n)+3\cos(n)}{n} \leq \frac{4}{n}$
2) En déduire que (u_n) converge vers 0

Exercice 18 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante et minorée par 2
2) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n)

Exercice 19 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$

1) Montrer que (u_n) est croissante
2) Montrer que (u_n) n'est pas majorée
3) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 20 :

Étudier la convergence des suites définies par :

1) $u_n = \frac{7}{3^n}$, $n \geq 0$
2) $v_n = -5\sqrt{3}^n$, $n \geq 0$
3) $w_n = \frac{1}{5}(-1)^n$, $n \geq 0$
4) $t^n = 3^n - 5^n, n \geq 0$

Exercice 21 :

(u_n) est la suite définie par $u_n = 0,\underbrace{77\ldots7}_{\text{n fois}}$, $n \geq 1$

1) Écrire une fonction en langage Python nommée terme(n) qui renvoie u_n
2) En remarquant que $u_n = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \cdots + \frac{7}{10^n}$, déterminer la limite de (u_n)

Exercice 22 :

Une observation faite sur la fréquentation d'un stade de football a permis de constater pour chaque année un taux de réabonnement de 80% ainsi que l'apparition de 4000 nouveaux abonnés.
On note u_n le nombre d'abonnés à la fin de la n-ième année et on précise que $u_0 = 7000$

1) Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 4000$
2) Montrer que (u_n) est majorée par 20 000
3) Montrer que (u_n) est croissante

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = 20\,000 - u_n$

4) Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le 1er terme et la raison
5) Exprimer w_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n
6) Déterminer la limite de (u_n)
7) Compléter le script qui permet de déterminer après combien d'années le nombre d'abonnés dépassera 16 000

```
def abonnés():
    u=0
    n=0
    while ....   :
        n=n+1
        u=......
    return(n)
```

-- CORRIGÉS DES EXERCICES D'APPLICATION --

Exercice 1 :

Soit $P(n) : u_n = \frac{n}{n+1}$

On veut montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$

- Initialisation : $u_0 = 0$ et $\frac{0}{0+1} = 0$ donc $P(0)$ est vraie

- Hérédité :

  On suppose qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie soit $u_k = \frac{k}{k+1}$

  et on prouve que $P(k+1)$ est vraie soit $u_{k+1} = \frac{k+1}{k+1+1} = \frac{k+1}{k+2}$

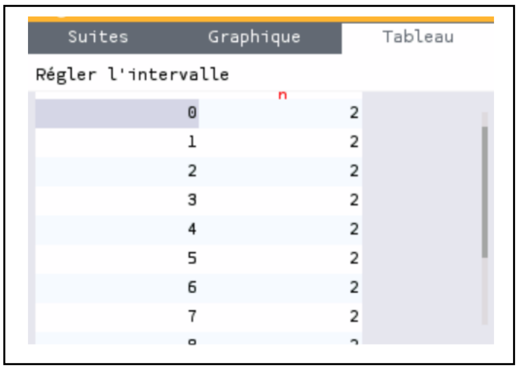
  On sait que par définition de la suite(u_n) , $u_{k+1} = u_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

  Or $u_k = \frac{k}{k+1}$ donc $u_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$

- Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$ soit $u_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 0$

Exercice 2 :

1)



2) On conjecture que $u_n = 2$, $n \geq 0$

3) Soit $P(n) : u_n = 2$

   On veut montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$

- Initialisation : $u_0 = 2$ donc $P(0)$ est vraie

- Hérédité :

  On suppose qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie soit $u_k = 2$

  et on prouve que $P(k+1)$ est vraie soit $u_{k+1} = 2$

  On sait que par définition de la suite(u_n) , $u_{k+1} = \frac{3}{4}u_k + \frac{1}{2}$

  Or $u_k = 2$ donc $u_{k+1} = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

- Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$ soit $u_n = 2$, $n \geq 0$

Exercice 3 :

Soit $P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$

On veut montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$

- Initialisation : $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ donc $P(1)$ est vraie
- Hérédité :
  On suppose qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $P(k)$ soit vraie soit $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$
  et on prouve que $P(k+1)$ est vraie soit $1 + 2 + \cdots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

  On sait que $1 + 2 + \cdots + k + k + 1 = (1 + 2 + \cdots + k) + k + 1$
  Or $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$
  donc $1 + 2 + \cdots + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$
- Conclusion : La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$ soit $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$

Exercice 4 :

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

Alors $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$

Alors, pour tout $n \geq 1$, il vient : $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n+1} < 0$

On en déduit que la suite (u_n) est décroissante (à partir de $n = 1$)

Exercice 5 :

1)

Valeur de n	Terme u_n
0	u_0=0^2−9×0−20=-20
1	u_1=1^2−9×1−20=-28
2	u_2=2^2−9×2−20=-34
3	u_3=3^2−9×3−20=-38
4	u_4=4^2−9×4−20=-40

On remarque que $u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > u_4$

2) pour tout $n \geq 0$ par $u_n = n^2 - 9n - 20$

a) $n \geq 0,\ u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 9(n+1) - 20 - (n^2 - 9n - 20)$
$= n^2 + 2n + 1 - 9n - 9 - 20 - n^2 + 9n + 20$
$= 2n - 8 > 0$ pour $n > 4$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante à partir de $n = 5$

b) La suite (u_n) est définie par une relation explicite $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - 9x - 20$
Cette fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x) = 2x - 9$

x	0	4,5	+∞
Signe de $f'(x)$	-	0	+

Puisque f croit sur $[4{,}5\,;+\infty[$ alors (u_n) est croissante à partir de $n = 5$

Exercice 6 :

(u_n) est croissante $\Leftrightarrow u_n \leq u_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

Soit $P(n)$: $u_n \leq u_{n+1}$

On veut montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$

- Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 3 = \frac{1}{4} \times 1 + 3 = \frac{13}{4}$ donc $u_0 \leq u_1$ et $P(0)$ est vraie

- Hérédité :
  On suppose qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie soit $u_k \leq u_{k+1}$
  et on prouve que $P(k+1)$ est vraie soit $u_{k+1} \leq u_{k+2}$

  On sait que $u_k \leq u_{k+1}$ donc $\frac{1}{4}u_k \leq \frac{1}{4}u_{k+1}$ donc $\frac{1}{4}u_k + 3 \leq \frac{1}{4}u_{k+1} + 3$ soit $u_{k+1} \leq u_{k+2}$

- Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$ soit $u_n \leq u_{n+1}\,, n \geq 0$

Exercice 7 :

$n \geq 1\,, u_n - \frac{3}{2} = \frac{2n+1}{3n-1} - \frac{3}{2} = \frac{2(2n+1)-3(3n-1)}{2(3n-1)} = \frac{4n+2-9n+3}{2(3n-1)} = \frac{-5n+5}{2(3n-1)}$

Or $n \geq 1$ donc $-5n + 5 \leq 0$ et $2(3n-1) > 0$ donc $u_n - \frac{3}{2} \leq 0$

(u_n) est donc majorée par $\frac{3}{2}$

Exercice 8 :

Soit $P(n) : u_n \geq -3{,}75$

On veut montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$

- Initialisation : $u_0 = 6 \geq -3{,}75$ donc $P(0)$ est vraie

- Hérédité :
  On suppose qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie soit $u_k \geq -3{,}75$
  et on prouve que $P(k+1)$ est vraie soit $u_{k+1} \geq -3{,}75$

  On sait que $u_k \geq -3{,}75$ donc 0,2 $u_k \geq -3{,}75 \times 0{,}2$ donc 0,2 $u_k - 3 \geq -0{,}75 - 3$
  soit $u_{k+1} \geq -3{,}75$

- Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$ soit $u_n \geq -3{,}75$, $n \geq 0$

Exercice 9 :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}\,, n^2 + 1 > 0$ et $n^2 + 5 > 0$ donc $u_n > 0$

De plus, pour tout entier $n \in \mathbb{N}\,, n^2 + 1 < n^2 + 5$ donc $u_n < 1$

Donc $0 < u_n < 1$ soit (u_n) bornée

Exercice 10 :

1)

n	1	10	100	1000
u_n	4	4,9	4,99	4,999
$\|u_n - 5\|$	1	0,1	0,01	0,001

2) On conjecture que (u_n) converge vers 5

En effet, $n \geq 1\,, |u_n - 5| \leq 1$ $(N = 1$ et $r = 1)$
$n \geq 10\,, |u_n - 5| \leq 0{,}1$ $(N = 10$ et $r = 0{,}1)$
$n \geq 100\,, |u_n - 5| \leq 0{,}01$ $(N = 100$ et $r = 0{,}01)$
$n \geq 1000\,, |u_n - 5| \leq 0{,}001$ $(N = 1000$ et $r = 0{,}001)$

Pour tout $r > 0$, on peut trouver un rang N tel que $n \geq N$, $|u_n - 5| \leq r$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$

Exercice 11 :

1) $1 - 10^{-k} < u_n < 1 + 10^{-k} \Leftrightarrow u_n < 1 + 10^{-k}$ car $u_n \geq 1$

$$u_n < 1 + 10^{-k} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + 10^{-k} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < 10^{-k} \Leftrightarrow n+1 > 10^k \Leftrightarrow n > 10^k - 1$$

2) $1 - 10^{-k} < u_n < 1 + 10^{-k} \Leftrightarrow -10^{-k} < u_n - 1 < 10^{-k} \Leftrightarrow |u_n - 1| \leq 10^{-k}$
$r = 10^{-k}$ et $N = 10^k - 1$
Pour tout $r > 0$, on peut trouver un rang N tel que $n > N$, $|u_n - 1| \leq r$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Exercice 12 :

1) $-10\sqrt{n} < -10^7 \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{-10^7}{-10} \Leftrightarrow \sqrt{n} > 10^6 \Leftrightarrow n > (10^6)^2 \Leftrightarrow n > 10^{12}$
Pour $n \geq 10^{12} + 1$, $-10\sqrt{n} < -10^7$
$n_0 = 10^{12} + 1$

2) $A = -10^7$ et $n_0 = 10^{12} + 1$
Pour tout $A < 0$, tout intervalle du type $]-\infty; A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exercice 13 :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n + 1 = +\infty$
D'après la règle sur la limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n + 3 = -\infty$
D'après la règle sur la limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
D'après la règle sur la limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$
D'après la règle sur la limite d'un quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$

Exercice 14 :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ donc il s'agit d'une FI (Forme Indéterminée $+\infty - \infty$)
On factorise u_n en mettant n en facteur
$u_n = n\left(\frac{2\sqrt{n}}{n} - 1\right) = n(\frac{2}{\sqrt{n}} - 1)$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} - 1 = -1$
D'après la règle sur la limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 3n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 + 4 = +\infty$ donc il s'agit d'une FI (Forme Indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$)
On factorise le numérateur et le dénominateur en mettant n^2 en facteur
$v_n = \frac{n^2(1+\frac{3}{n})}{n^2(3+\frac{4}{n^2})} = \frac{1+\frac{3}{n}}{3+\frac{4}{n^2}}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \frac{4}{n^2} = 3$
D'après la règle sur la limite d'un quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{3}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} n + 3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 2 = +\infty$ donc il s'agit d'une FI (Forme Indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$)
On factorise par n le numérateur et par n^2 le dénominateur

$w_n = \frac{n(1+\frac{3}{n})}{n^2(1-\frac{2}{n^2})} = \frac{1}{n} \times \frac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{n^2} = 1$

D'après la règle sur la limite d'un quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}} = 1$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'après la règle sur la limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n + 2 = +\infty$ donc il s'agit d'une FI (Forme Indéterminée $0 \times \infty$)

On développe : $t_n = \sqrt{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$

D'après la règle sur la limite d'une somme $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$

Exercice 15 :

1) Soit $P(n)$: $e^n \geq n + 1$

On veut montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$

- Initialisation : $e^0 = 1 \geq 0 + 1$ donc $P(0)$ est vraie
- Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie soit $e^k \geq k + 1$ et on prouve que $P(k+1)$ est vraie soit $e^{k+1} \geq k + 2$

On sait que $e^{k+1} = e^k \times e^1$

Or $e^k \geq k + 1$ donc $e^{k+1} \geq e(k+1)$

$e(k+1) \geq k + 2 \Leftrightarrow ek - k \geq 2 - e \Leftrightarrow k(e-1) \geq 2 - e$ (cette inégalité est toujours vraie car $k(e-1) \geq 0$ et $2 - e < 0$)

Donc $e^{k+1} \geq e(k+1) \geq k + 2$

- Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$ soit $e^n \geq n + 1$, $n \geq 0$

2) pour tout entier $n \geq 0$, $e^n \geq n + 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$

d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$

3) pour tout entier $n \geq 0$, $-{v_n}^2 \leq 0$ donc $v_{n+1} \leq -n - 1$ soit $v_{n+1} \leq -(n+1)$

ainsi pour tout entier $n \geq 0$, $v_n \leq -n$

4) pour tout entier $n \geq 0$, $v_n \leq -n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$

d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Exercice 16 :

1) pour tout entier $n \geq 0, -1 \leq cos n \leq 1$ donc $1 \leq 2 + cos n \leq 3$

donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2+cos n} \leq 1$ (car la fonction inverse décroit sur $]0;+\infty[$)

donc $\frac{n}{3} \leq \frac{n}{2+cos n} \leq n$ (on multiplie les inégalités par $n \geq 0$)

ainsi $\frac{n}{3} \leq \frac{n}{2+cos n}$

2) pour tout entier $n \geq 0, \frac{n}{3} \leq \frac{n}{2+cosn}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{3} = +\infty$
d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2+cosn} = +\infty$

Exercice 17 :

1) pour tout entier naturel $n \geq 1$,
$-1 \leq sin(n) \leq 1$ et $-1 \leq cos(n) \leq 1$ donc $-3 \leq 3cos(n) \leq 3$
donc $-1-3 \leq \sin(n) + 3\cos(n) \leq 1+3$ soit $-4 \leq \sin(n) + 3\cos(n) \leq 4$
donc $\frac{-4}{n} \leq \frac{\sin(n)+3\cos(n)}{n} \leq \frac{4}{n}$

2) pour tout entier naturel $n \geq 1, \frac{-4}{n} \leq \frac{\sin(n)+3\cos(n)}{n} \leq \frac{4}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-4}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$

d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)+3\cos(n)}{n} = 0$

Exercice 18 :

1) Soit $P(n)$: $u_n \geq u_{n+1} \geq 2$ ((u_n) décroissante et minorée par 2)
On veut montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$
Initialisation : $u_0 = 6$, $u_1 = \sqrt{8}$ et : $u_0 \geq u_1 \geq 2$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité :
On suppose qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie soit $u_k \geq u_{k+1} \geq 2$
et on prouve que $P(k+1)$ est vraie soit $u_{k+1} \geq u_{k+2} \geq 2$

On sait que $u_k \geq u_{k+1} \geq 2$ donc $u_k + 2 \geq u_{k+1} + 2 \geq 4$
Donc $\sqrt{u_k+2} \geq \sqrt{u_{k+1}+2} \geq \sqrt{4}$ car la fonction racine carré croit sur $[0;+\infty[$
Donc $u_{k+1} \geq u_{k+2} \geq 2$ car $u_{k+1} = \sqrt{u_k+2}$ et $u_{k+2} = \sqrt{u_{k+1}+2}$ par définition de (u_n)

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$ soit $u_n \geq u_{n+1} \geq 2$, $n \geq 0$

2) (u_n) est décroissante et minorée par 2 donc (u_n) converge vers un nombre $L \geq 2$

Exercice 19 :

1) Pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = u_n + n^2 - u_n = n^2 > 0$ donc (u_n) est croissante
2) On raisonne par l'absurde
On suppose que la suite (u_n) est majorée donc (u_n) converge vers un nombre L
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + n^2 = +\infty$
La limite de la suite étant unique, on aboutit à une contradiction
donc (u_n) n'est pas majorée
3) La suite (u_n) est croissante et non majorée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 20 :

1) $u_n = \frac{7}{3^n} = 7 \times (\frac{1}{3})^n$
$-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{3})^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2) $v_n = -5\sqrt{3}^n$
$\sqrt{3} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3}^n = +\infty$ donc d'après la règle de la limite du produit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

3) $w_n = \frac{1}{5}(-1)^n$
$(-1)^n$ n'a pas de limite ($q = -1 \leq -1$) donc (w_n) diverge en n'ayant pas de limite

4) $t^n = 3^n - 5^n$
$\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -5^n = -\infty$ On est en présence d'une FI $(+\infty - \infty)$
$t^n = 5^n(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1)$
$-1 < \frac{3}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n - 1 = -1$
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ donc d'après la règle de la limite du produit $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = -\infty$

Exercice 21 :

1)

```python
def terme(n):
    u=0
    for i in range(1,n+1):
        u=u+7/(10**i)
    return(u)
```

2) $u_n = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \cdots + \frac{7}{10^n}$, $n \geq 1$
$u_n = \frac{7}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = \frac{7}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + (\frac{1}{10})^{n-1}\right)$
Or on sait que $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $q \neq 1$
Donc $u_n = \frac{7}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + (\frac{1}{10})^{n-1}\right) = \frac{7}{10}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\right) = \frac{7}{10}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}}\right) = \frac{7}{9}(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n)$
$-1 < \frac{1}{10} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n = 1$
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{9} = \frac{7}{9}$ donc d'après la règle de la limite du produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{7}{9}$

Exercice 22 :

1) u_n est le nombre d'abonnés à la fin de la n-ième année
u_{n+1} est le nombre d'abonnés l'année suivante
chaque année le taux de réabonnement est de 80% et on compte 4000 nouveaux abonnés
donc pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 4000$

2) Soit $P(n) :\ u_n \leq 20\,000$
On veut montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$
<u>Initialisation :</u> $u_0 = 7000 \leq 20\,000$ donc $P(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> :
On suppose qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie soit $u_k \leq 20\,000$
et on prouve que $P(k+1)$ est vraie soit $u_{k+1} \leq 20\,000$

On sait que $u_k \leq 20\,000$ donc $0{,}8u_k \leq 0{,}8 \times 20\,000$ soit $0{,}8u_k \leq 16\,000$
donc $0{,}8u_k + 4\,000 \leq 16\,000 + 4\,000$ soit $u_{k+1} \leq 20\,000$
<u>Conclusion :</u> La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$ soit $u_n \leq 20\,000$, $n \geq 0$

3) $n \geq 0,$, $u_{n+1} - u_n = 0{,}8u_n + 4000 - u_n = -0{,}2u_n + 4\,000 = -0{,}2(u_n - 20\,000)$
Or $u_n \leq 20\,000$ donc $u_n - 20\,000 \leq 0$ donc $-0{,}2(u_n - 20\,000) \geq 0$
Donc (u_n) croit

4) $w_n = 20\,000 - u_n$, $n \geq 0$

$w_{n+1} = 20\,000 - u_{n+1} = 20\,000 - (0{,}8u_n + 4\,000) = -0{,}8u_n + 16\,000$
$w_{n+1} = 0{,}8\left(-u_n + \frac{16\,000}{0{,}8}\right) = 0{,}8(20\,000 - u_n) = 0{,}8w_n$
Donc (w_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $w_0 = 20\,000 - u_0 = 13\,000$

5) (w_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $w_0 = 20\,000 - u_0 = 13\,000$
Donc $w_n = w_0 \times q^n = 13\,000 \times 0{,}8^n, n \geq 0$

$w_n = 20\,000 - u_n$ donc $u_n = 20\,000 - w_n = 20\,000 - 13\,000 \times 0{,}8^n, n \geq 0$

6) $-1 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} 13\,000 \times 0{,}8^n = 0$
Donc d'après la règle de la limite d'une somme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 20\,000$
Le nombre d'abonnés tend vers 20 000

7)
```
def abonnés():
    u=0
    n=0
    while u<=16000:
        n=n+1
        u=20000-13000*0.8**n
    return(n)
```

Extrait de cours

-- DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1 --

à envoyer à la correction

Exercice 1 : (4 pts)

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 0$, $u_n = n^2 + 3n$

1) Étudier le sens de variation de la suite (u_n)
2) Déterminer en utilisant le tableur de la calculatrice le plus petit entier n_1 tel que $u_n > 100$ et le plus petit entier n_2 tel que $u_n > 5\ 000$ puis conjecturer la limite de la suite (u_n)
3) Déterminer la limite de la suite (u_n) en utilisant les règles sur les opérations

Exercice 2 : (4 pts)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 0$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que (u_n) décroit
2) Montrer par récurrence que (u_n) est majorée par 3

Exercice 3 : (4 pts)

Déterminer les limites des suites définies par :

1) $u_n = (n^2 - 3)(-5n + 3), n \geq 0$
2) $v_n = \frac{n^2+n}{n+4}, n \geq 0$
3) $t_n = 3^n - 2^n$, $n \geq 0$
4) $w_n = n^2 - (-1)^n$, $n \geq 0$ (on pensera aux théorèmes de comparaison)

Exercice 4 : (4 pts)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 0$ par : $\begin{cases} u_0 = 300 \\ u_{n+1} = 0{,}96u_n + 22 \end{cases}$

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 0$ par $v_n = u_n - 550$

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera la raison et le 1er terme
2) Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n
3) Déterminer la limite de (u_n)
4) Écrire un script qui détermine le plus petit entier tel que $u_n > 500$

Exercice 5 : (4 pts)

Soit $T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^n}$, $n \geq 0$

1) Montrer que (T_n) croit
2) Calculer T_n
3) Déterminer la limite de (T_n)

Soit $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \times \frac{1}{n}$, $n \geq 0$

4) Compléter la fonction somme ci-dessous qui calcule S_n, n étant donné

```
def somme(n):
    S=0
    for k in range( ....... ):
        S=..........
    return(S)
```

Extrait de cours