SEQUENCE 1 : NOMBRES ENTIERS et RATIONNELS

OBJECTIFS :

- **Savoir trouver tous les diviseurs d'un nombre entier.**
- **Savoir reconnaître un nombre premier.**
- **Calculer le PGCD de deux nombres entiers.**
- **Déterminer si deux nombres entiers sont premiers entre eux.**
- **Rendre une fraction irréductible.**

1. DIVISEURS COMMUNS à DEUX NOMBRES ENTIERS :

a, *b* et *k* désignent des entiers strictement positifs.

> A retenir
>
> Dire qu'un entier *a* est un diviseur d'un entier *b* signifie qu'il existe un entier *k* tel que $b = a \times k$ (ou $\frac{b}{a} = k$). On dit aussi que b est un multiple de *a* ou que *b* est divisible par *a*

Remarque : Si $b = a \times k$ a et k sont deux diviseurs de *b*

Exemple : 12 = 6 × 2 donc 6 et 2 sont deux diviseurs de 12.

Exemple **:** Établir la liste de tous les diviseurs de 36.

Pour cela, on cherche tous les produits d'entiers naturels égaux à 36. On teste successivement tous les diviseurs

36 = 1 × 36

= 2 × 18

= 3 × 12

= 4 × 9 (n'est pas un diviseur de 36)

= 6 × 6 (On s'arrête car tous les diviseurs supérieurs à 6 ont été trouvé précédemment)

Les diviseurs de 36 sont donc 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

> A retenir
>
> - Dire qu'un entier *k* est un diviseur commun à deux entiers *a* et *b* signifie que *k* divise à la fois *a* et *b*.
> - Le plus grand diviseur commun à *a* et à *b* est appelé le PGCD de *a* et *b*. On le note **PGCD(*a* ;*b*)**
> - Dire que deux nombres *a* et *b* sont premiers entre eux signifie que 1 est le seul diviseur commun à *a* et à *b* .

Exemple : 36 = 3 × 12 et 24 = 2 × 12 donc 12 est un diviseur commun et 24 et 36 ne sont pas premiers entre eux.

> A retenir
>
> **Propriété** : - Si PGCD(*a* ; *b*) = 1 alors a et b sont premiers entre eux
>
> - Si *b* est un diviseur de a alors PGCD(*a* ; *b*) = *b*

2. DETERMINER LE GRAND DIVISEUR COMMUN

a et b désignent deux entiers strictement positifs

a) A l’aide des diviseurs communs

Pour déterminer le PGCD de deux nombres a et b , on établit la liste des diviseurs de a et de b

Exemple : Déterminer le PGCD de 28 et 42
Les diviseurs de 28 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28
Les diviseurs de 42 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42
Les diviseurs communs à 28 et 42 sont : 1 ; 2 ; 7 ; 14.
Donc PGCD(28 ; 42) = 14

b) Algorithme des soustractions successives

Principe : Si a = b , PGCD(a ; b) = a , si a > b , PGCD(a ; b) = PGCD(b ; a – b)

Exemple : Déterminer le PGCD de 84 et 36

a	b	a - b
84	36	48
48	36	12
36	12	24
24	12	12
12	12	0

PGCD(84 ;36) = PGCD (48 ; 36)
= PGCD(36 ; 12)
=PGCD (24 ; 12)
= PGCD (12 ; 12)
= 12

Remarque : On aurait pu remarquer que 12 est un diviseur de 36 et donc dire directement que PGCD(36 ; 12) = 12

c) Algorithme d’Euclide

Principe : Si a = b, PGCD (a ; b) = a
Si a > b, PGCD (a ; b) = PGCD(b ; r) où r est le reste de la division euclidienne de a par b

Exemple : Déterminer le PGCD de 1053 et 325.

a (dividende)	b (diviseur)	r (reste)
1053	325	78
325	78	13
78	13	0

PGCD (1053 ;325) = PGCD (325 ; 78)
= PGCD (78 ; 13)
= 13
car 13 est un diviseur de 78

3. FRACTIONS IRREDUCTIBLES

A retenir

Définition : Une fraction $\frac{a}{b}$ où a et b sont deux réels strictement positifs est irréductible lorsque a et b sont premiers entre eux.

Propriété : Pour rendre une fraction irréductible, on simplifie cette fraction par le PGCD de son numérateur et de son dénominateur

Remarque : Pour rendre une fraction irréductible, on peut commencer à la simplifier en utilisant les critères de divisibilité.

Exemple : Rendre la fraction $\frac{10165}{3745}$ irréductible

On remarque une simplification « évidente » par 5 : $\frac{10165}{3745} = \frac{2033}{749}$

Puis on cherche le PGCD de 2033 et 749 par l'une des 3 méthodes.
On utilise ici l'algorithme d'Euclide :

Dividende	Diviseur	Reste
2033	749	535
749	535	214
535	214	107
214	107	0

Donc le PGCD (2033 ; 749) = 107

$$\frac{10165}{3745} = \frac{2033}{749} = \frac{107 \times 19}{107 \times 7} = \frac{19}{7}$$

QCM BILAN

POUR CHACUNE DES QUESTIONS, CHOISIR LA (ou LES)BONNE(S) REPONSE(S)

	Question	**Réponse a**	**Réponse b**	**Réponse c**	**Réponse d**
1	435 est...	un multiple de 5	un diviseur de 5	divisible par 5	de la forme 5k où k est un entier
2	17 est...	un diviseur de 3 672	un multiple de 17	le seul diviseur de 17	un multiple de 8,5
3	Retrouve la (les) affirmation(s) vraie(s) :	Tout nombre entier est un multiple de 0	Il existe toujours au moins un diviseur commun à deux entiers	La liste des diviseurs d'un entier est infinie	Un nombre entier est toujours divisible par lui même
4	$418 = 8 \times 51 + 10$ donc...	8 est le quotient de la division euclidienne de 418 par 51	51 est le quotient de la division euclidienne de 418 par 8	51 est le diviseur dans la division euclidienne de 418 par 51	51 est un diviseur de 418
5	15 est...	un diviseur commun à 30 et 45	le PGCD de 30 et 45	le plus grand multiple commun à 3 et 5	le plus grand des diviseurs communs à 60 et 135
6	Le PGCD de 252 et 196 est...	1	28	2	0
7	Retrouve la (les) affirmation(s) vraie(s) : (n et m sont des entiers non nuls.)	n divise m donc PGCD (n ; m) = n	$m = 3n$ donc PGCD (3 ; m) = 3	PGCD (1 ; n) = 1	$n = m + 1$ donc PGCD (n ; m) = 1
8	18 et 35...	n'ont pas de diviseur commun	sont premiers entre eux	sont premiers	ont un seul diviseur commun : 1
9	Retrouve le couple d'entiers premiers entre eux :	357 et 468	13 450 et 9 985	224 et 447	435 et 812
10	Retrouve la (les) fraction(s) irréductible(s) :	$\frac{2590}{3885}$	$\frac{74}{111}$	$\frac{1601}{1621}$	$\frac{2429}{1735}$

EXERCICES D'APPLICATIONS

***Exercice 1 :**
Traduire chaque égalité par une phrase ou intervient le mot diviseur ou le mot multiple

a) $135 = 15 \times 9$ b) $\frac{58}{2} = 29$ c) $36 \times 7 = 252$

***Exercice 2 :**

a) Ecrire la liste des diviseurs de 36
b) Ecrire la liste des diviseurs de 60
c) Ecrire la liste des diviseurs communs à 36 et 60 puis en déduire le PGCD de 36 et 60.
d) Ecrire la liste des diviseurs de ce PGCD. Que constate- t-on ?

***Exercice 3:**
Expliquer pourquoi 7 ne peut-être le PGCD de 157 et 3780.

***Exercice 4:**
Sans faire de calculs, expliquer pourquoi les deux nombres ne sont pas premiers entre eux.
a) 218 et 162 b) 21 et 18 c) 175 et 190

****Exercice 5 :**
Déterminer le PGCD des deux nombres par l'algorithme des soustractions successives. Dire si ces deux nombres sont premiers entre eux.
a) 357 et 204 b) 657 et 527

****Exercice 6 :**
Déterminer le PGCD des deux nombres par l'algorithme d'Euclide. Dire si ces deux nombres sont premiers entre eux.
a) 569 et 456 b) 5 678 et 629

****Exercice 7 :**

On note $A = \frac{12}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{7}{9}$ et $B = \left(\frac{2}{3} - 5\right) \div \frac{1}{9}$

a) Calculer A et écrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
b) Calculer B et donner le résultat sous la forme d'un entier relatif.

****Exercice 8 :**

On note $A = \frac{5}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{9}{4}$ et $B = \dfrac{3 - \frac{3}{2}}{\frac{4}{3} \times 7}$

Calculer A et B et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

****Exercice 9 :**

Déterminer le PGCD de 1 788 et de 2 418 puis rendre la fraction $\frac{1788}{2418}$ irréductible.

*****Exercice 10 :**
Amanda veut recouvrir son salon rectangulaire de 5,40m sur 3 m, par des dalles carrées de moquette, toutes identiques. La longueur du côté de ces dalles est un nombre entier de centimètres.

1) Amanda souhaite utiliser le minimum de dalles.
    a) calculer la longueur de côté de chaque dalle.
    b) Combien de dalles faudra-il ?
2) Dans le commerce, Amanda ne trouve que des dalles carrées dont la longueur du côté est strictement comprise entre 10cm et 15 cm. Quelle doit être la longueur du côté et combien de dalles Amanda devra-t-elle acheter ?

*****Exercice 11 : utilisation de la calculatrice**
Calculer sans calculatrice et sans poser d'équation :
a- 101^2
b- 103^2
c- 101x99
Vérifier vos résultats à l'aide de votre calculatrice. Pour a et b en utilisant la fonction « multiplication », puis en utilisant la fonction « puissance »

*****Exercice 12 : utilisation de la calculatrice**
Un triangle ABC rectangle en A a pour dimension AB = 3 cm et AC= 4 cm. Déterminer sans calculatrice la dimension du côté BC. Vérifier votre résultat à l'aide de votre calculatrice.
N.B. : on utilisera la relation de Pythagore

*****Exercice 13 : utilisation de la calculatrice**
Calculer sans calculatrice :
les trois cinquièmes de 35/9 ;
les quatre cinquièmes de 65/8 ;
les trois septièmes de 49/6.
Vérifier vos résultats à l'aide de votre calculatrice.

*****Exercice 14 : Test vrai-faux**
Répondez par vrai ou par faux :
- a- 26/8 est une fraction irréductible ;
- b- 2 est diviseur de 12 ;
- c- 35/5 est une fraction irréductible ;
- d- 37/11 est une fraction irréductible.

CORRIGÉS

QCM

Q1 : réponses a, c et d 435 = 5 × 87
Q2 : réponses a et b 3672 = 17 × 216 et 17 = 1 × 17
Q3 : réponses b et d 1 est un diviseur commun à tous les entiers et n = 1 × n
Q4 : réponses a et c le reste ne peut être plus grand que le diviseur
Q5 : réponses a,d et b
Q6 : réponses b
Q7 : réponses a b , c et d a) cours b) 3 est un diviseur de m , c) 1 est un diviseur de n, d), on utilise la méthode des soustraction successives.
Q8 : réponses b et d
Q9 : réponse c 357 et 468 sont divisibles par 3, 13 450 et 9985 sont divisibles par 5 et 435 et 812 sont divisibles par 29
Q10 : réponse c a) divisible par 5 , b) divisible par 37 d) divisible par 347

Exercice 1 :

a) 135 est un multiple de 15 et de 9 / 15 et 9 sont deux diviseurs de 135
b) 58 est un multiple de 2 et de 29 / 2 et 29 sont deux diviseurs de 58
c) 252 est un multiple de 36 et de 7 / 36 et 7 sont deux diviseurs de 252

Exercice 2 :

a) 36 = 1 × 36 =2 × 18 = 3 × 12 = 4 × 9 = 6 × 6
Donc les diviseurs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36

b) 60 = 1 × 60 = 2 × 30 = 3 × 20 = 4 × 15 = 5 × 12 = 6 × 10
Donc les diviseurs de 60 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15,20, 30, 60.

c) Les diviseurs communs à 60 et 36 sont : 1, 2, 3, 4, et 12.
Donc PGCD(60 ; 36) = 12

d) les diviseurs de’ 12 sont 1, 2, 3, 4 et 12. Ce sont les diviseurs communs à 60 et 36.

Exercice 3:

157 n’est pas divisible par 7 donc 7 ne peut être le PGCD de 157 et 3780.

Exercice 4:

a) 218 et 162 sont divisibles par 2 b) 21 et 18 sont divisibles par 3
c) 175 et 190 sont divisibles par 5.

Exercice 5 :

a)

a	**b**	**a - b**
357	204	153
204	153	51
153	51	102
102	51	51
51	51	0

PGCD(357 ;204) = PGCD (204 ;153)
= PGCD(153 ; 51)
=PGCD (51 ; 102)
= PGCD (51 ; 51)
= 51

Donc 307 et 204 ne sont pas premiers entre eux

b)

a	**b**	**a - b**
657	527	130
527	130	397
397	230	167
230	167	63
167	63	104
104	63	41
63	41	22
41	22	19
22	19	3
19	3	16
16	3	13
13	3	10
10	3	7
7	3	4
4	3	1
3	1	

PGCD(657 ;527) = …
= PGCD (3 ; 1)
=1

Donc 657 et 527 sont premiers entre eux.

Exercice 6 :

a)

Dividende	Diviseur	Reste
569	456	113
456	113	4
113	4	1
4	1	0

PGCD (569 ; 456) = 1 . Ces deux nombres sont premiers entre eux.

b)

Dividende	Diviseur	Reste
5678	629	17
629	17	0

PGCD (5678 ; 629) = 17 . Ces deux nombres ne sont pas premiers entre eux.

Exercice 7 :

$$A = \frac{12}{5} - \frac{7\times 3}{5\times 3\times 3}$$
$$= \frac{12}{5} - \frac{7}{15}$$
$$= \frac{36}{15} - \frac{7}{15}$$
$$= \frac{29}{15}$$

$$B = \left(\frac{2}{3} - \frac{15}{3}\right) \div \frac{1}{9}$$
$$= \frac{-13}{3} \times \frac{9}{1}$$
$$= -39$$

Exercice 8 :

$$A = \frac{5}{3} - \frac{7\times 3\times 3}{3\times 4}$$
$$= \frac{20}{12} - \frac{63}{12}$$
$$= -\frac{43}{12}$$

$$B = \frac{\frac{6}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{28}{3}}$$
$$= \frac{3}{2} \times \frac{3}{28}$$
$$= \frac{9}{56}$$

Exercice 9 :

Dividende	Diviseur	Reste
2418	1788	630
1788	630	528
630	528	102
528	102	18
102	18	12
18	12	6
12	6	0

PGCD (2418 ; 1788) = 6

$$\frac{2418}{1788} = \frac{6\times 403}{6\times 298} = \frac{403}{298}$$

Exercice 10 :

1) a) La longueur de la dalle doit être un diviseur de 540 et de 300. Pour utiliser le minimum de dalles, il doit être le plus grand possible, donc la longueur des dalles est égale au PGCD de 540 et 300.

Dividende	Diviseur	Reste
540	300	240
300	240	60
240	60	0

PGCD(540 ; 300) = 60. Les dalles doivent donc mesurer 60 cm de longueur.

b) $\frac{300}{60}=5$ $\frac{540}{60}=9$

Il y aura 5 dalles dans la largeur et 9 en longueur soit 45 dalles au total.

2) La longueur de la dalle doit être un diviseur de 540 et de 300, ou un diviseur de 60 compris entre 10 et 15. C'est 12.

$\frac{300}{12}=25$ $\frac{540}{12}=45$

Il y aura 25 dalles dans la largeur et 45 en longueur soit 1125 dalles au total.

Exercice 11 :

a- $101^2 = 10201$

b- $103^2 = 10609$

c- 101x99 = 9999

Exercice 12 :

La relation de Pythagore dit que la somme des carrés des dimensions des côtés adjacents au sommet à angle droit est égale au carré de l'hypoténuse :

$AB^2+AC^2 = BC^2$.

$3^2+4^2 = BC^2$

$9+16 = BC^2$

$25 = BC^2$

BC = 5 cm

Exercice 13 :

Trois cinquièmes de 35/9 :

$$\frac{3}{5}\times\frac{35}{9}=\frac{3\times(7\times5)}{5\times(3\times3)}=\frac{7}{3}$$

Quatre cinquièmes de 65/8 :

$$\frac{4}{5}\times\frac{65}{8}=\frac{4\times(13\times5)}{5\times(4\times2)}=\frac{13}{2}$$

Trois septièmes de 49/6 :

$$\frac{3}{7}\times\frac{49}{6}=\frac{3\times(7\times7)}{7\times(3\times2)}=\frac{7}{2}$$

Exercice 14 :

a- Faux
b- Vrai
c- Faux
d- Vrai

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1 À envoyer à la correction

***Exercice 1 : 3 pts**

a) Ecrire la liste des diviseurs de 42
b) Ecrire la liste des diviseurs de 168
c) Ecrire la liste des diviseurs communs à 42 et 168 puis en déduire le PGCD de 42 et 168.

****Exercice 2 : 2 pts**

Déterminer le PGCD des deux nombres par l'algorithme des soustractions successives. Dire si ces deux nombres sont premiers entre eux.

a) 182 et 78 b) 117 et 153

****Exercice 3 : 2 pts**

Déterminer le PGCD des de nombres par l'algorithme d'Euclide. Dire si ces deux nombres sont premiers entre eux.

a) 534 et 235 b) 1 053 et 325

****Exercice 4 : 3 pts**

Un pâtissier dispose de 411 framboises et 685 fraises. Afin de préparer des tartelettes, il désire repartir ces fruits en les utilisant tous et obtenir le maximum de tartelettes identiques. Calculer le nombre de tartelettes et indiquer leur composition.

****Exercice 5 : 3 pts**

a. Pour chaque nombre : 1 035 ; 774 ; 322, indiquer s'il est divisible par 2, 5, par 9.
b. Les fractions $\frac{774}{1035}$ et $\frac{322}{774}$ sont-elles irréductibles ? Pourquoi ?
c. Calculer le PGCD de 322 et 1035. La fraction $\frac{322}{1035}$ est-elle irréductible ?

****Exercice 6 : 3 pts**

Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$A = \frac{2}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{8}{21}$ $\qquad B = \left(\frac{11}{7} - \frac{2}{5}\right) \times \frac{24}{7}$

****Exercice 7 : 2 pts**

Soit la fraction G= 216/576

1- Pourquoi cette fraction n'est-elle pas irréductible ? Justifier sans faire de calcul
2- Calculer le plus grand diviseur commun à 216 et 576
3- Ecrire G sous forme de fraction irréductible
4- A l'aide de votre calculatrice calculer la valeur de G telle qu'elle est donnée en début d'exercice et celle que vous obtenez pour la forme irréductible à la question 3.

****Exercice 8 : 2 pts**
Jean a nettoyé le parquet de son salon avec 6 kg de vernis et 4 litres de cire. Il a payé le tout 88 €.
La semaine suivante il recommence dans sa chambre. Cette fois-ci il utilise 3 kg du même vernis et 3 litres de la même cire, pour un total en achat de 51 €.
En utilisant votre calculatrice, déterminer le prix unitaire du vernis et de la cire.