

SEQUENCE 1 : PROBLEMES DU SECOND DEGRE

OBJECTIFS

- ▶ Maîtriser le vocabulaire : trinôme du 2nd degré, discriminant, parabole, racines, ...
- ▶ Etudier le signe d'une fonction trinôme
- ▶ Factoriser une fonction trinôme
- ▶ Savoir résoudre une équation du 2nd degré par la méthode du discriminant
- ▶ Savoir résoudre une inéquation du 2nd degré par la méthode du discriminant
- ▶ Mobiliser ces nouvelles connaissances dans des exercices de synthèse

PASSERELLE entre la classe de 2^{nde} et la classe de 1^{ère}

Vous trouverez ci-dessous les principaux résultats de la classe de 2^{nde} qui vous seront utiles pour bien comprendre ce chapitre.

Identités remarquables

$$\begin{aligned} ! \quad (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Une propriété très utile

! Un produit de facteurs est nul si et seulement si, un des facteurs est nul.
 $A \times B = 0$ équivaut à $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple : $(x+1)(x-1) = 0$
 équivaut à $(x+1) = 0$ ou $(x-1) = 0$
 soit à $x = -1$ ou $x = 1$.

Transformer pour résoudre

Exemple : On souhaite résoudre l'équation $(x-1)^2 - (x-1) = 0$.
 Pour résoudre cette équation, on va la transformer.
 La transformation consiste à factoriser l'expression $(x-1)^2 - (x-1)$ par $(x-1)$.
 On obtient $(x-1)^2 - (x-1) = (x-1)[(x-1) - 1] = (x-1)(x-2)$.
 Ainsi résoudre l'équation de départ $(x-1)^2 - (x-1) = 0$ revient à résoudre l'équation $(x-1)(x-2) = 0$, ce qui est plus simple car on reconnaît un produit de facteurs nul.
 Selon le résultat précédent, $(x-1)(x-2) = 0$ équivaut à $(x-1) = 0$ ou $(x-2) = 0$ D'où $x = 1$ ou $x = 2$.
 Les solutions de l'équation $(x-1)^2 - (x-1) = 0$ sont donc $x = 1$ et $x = 2$.

Choisir la bonne écriture

Exemple : On dispose de deux écritures différentes de la même expression $A(x)$:

Ecriture 1 : $A(x) = \left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$

Ecriture 2 : $A(x) = x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{15}{8}$

Il est important de choisir la bonne expression en fonction du problème posé.

Ici, pour résoudre l'équation $A(x) = 0$, il faut choisir l'écriture 1 mais pour, par exemple, calculer $A(0)$, il est préférable d'utiliser l'écriture 2.

1. POLYNOMES DU SECOND DEGRE

1A. Définitions

Définition 1 : On appelle **fonction polynôme du 2nd degré** toute fonction f de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont des nombres réels (avec $a \neq 0$).

L'expression $ax^2 + bx + c$ est aussi appelée **trinôme du 2nd degré**.

La lettre x s'appelle la **variable**.

Le terme ax^2 s'appelle le **terme de degré 2**, le terme ax s'appelle **terme de degré 1** et le terme c s'appelle **terme constant**.

Exemples : Les expressions suivantes sont des trinômes

$P_1(x) = 2x^2 + 8x$; les coefficients sont : $a = 2$; $b = 8$ et $c = 0$.

$P_2(x) = -x^2 + 1$; les coefficients sont : $a = -1$; $b = 0$ et $c = 1$.

✕

Exercice 1

Définition 2 : On appelle **forme canonique** d'un trinôme du 2nd degré $ax^2 + bx + c$ son écriture sous la forme :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec α et β des nombres réels. ($\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$)

La forme canonique est une écriture du trinôme dans laquelle la variable x n'apparaît qu'une seule fois.

Exemple : Reprenons le trinôme $P_1(x) = 2x^2 + 8x$ et écrivons sa forme canonique

1^{ère} étape : on factorise par le coefficient devant x^2

Sur notre exemple, on factorise donc par 2 : $P_1(x) = 2(x^2 + 4x)$.

2^{ème} étape : on considère les termes de degré 2 et 1 comme le début du développement d'une identité remarquable

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ici, $x^2 + 4x$ est le début du développement de l'identité remarquable $(x + 2)^2$.

En effet, $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ et donc, on peut écrire $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$.

Le trinôme se réécrit donc $P_1(x) = 2[(x + 2)^2 - 4] = 2(x + 2)^2 - 8$.

Dans cette écriture, la variable x n'apparaît qu'une seule fois : c'est la forme canonique.

G

Pour déterminer la forme canonique d'un trinôme, il faut toujours respecter ces 2 étapes.

1B. Les différentes écritures d'un polynôme du 2nd degré

Un même polynôme du 2nd degré peut s'écrire sous différentes formes :

► **Forme développée** : le trinôme est écrit sous la forme d'une somme de termes.

Exemple : $2x^2+8x$ est la forme développée du trinôme P_1 .

► **Forme canonique** : dans cette écriture du trinôme, la variable x n'apparaît qu'une seule fois.

Exemple : $2(x+2)^2-8$ est la forme canonique du trinôme P_1 .

► **Forme factorisée** : le trinôme est écrit sous la forme d'un produit de facteurs.

Exemple : $2(x)(x+4)$ est une forme factorisée du trinôme P_1 .

G

- Il faudra être capable de passer de l'une de ces formes à une autre et devant tout problème, il faut se poser la question de savoir quelle serait la forme la plus adaptée pour le résoudre.
- Nous verrons plus loin que certains polynômes du 2nd degré n'ont pas de forme factorisée.

 χ

Exercices 2, 3, 4

1C. Tableau de variations et courbe représentative d'un trinôme du 2nd degré

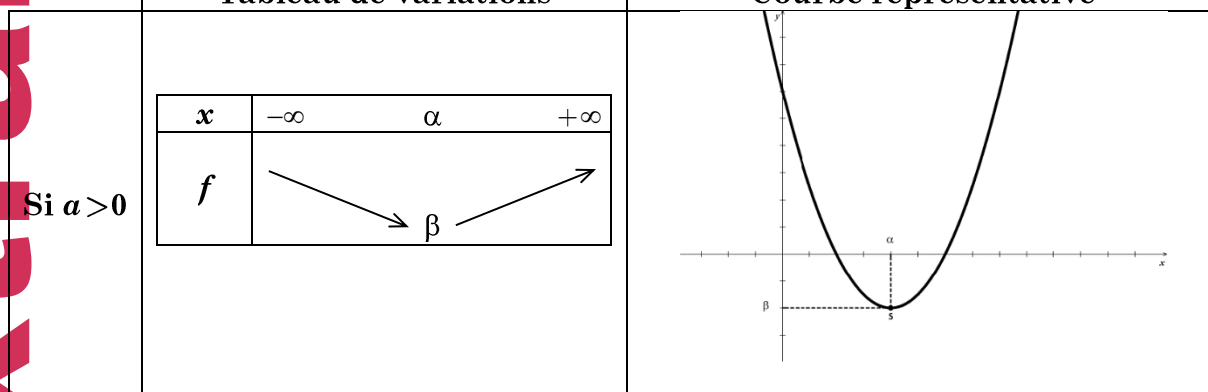
Soit f une fonction polynôme donnée par sa forme canonique :

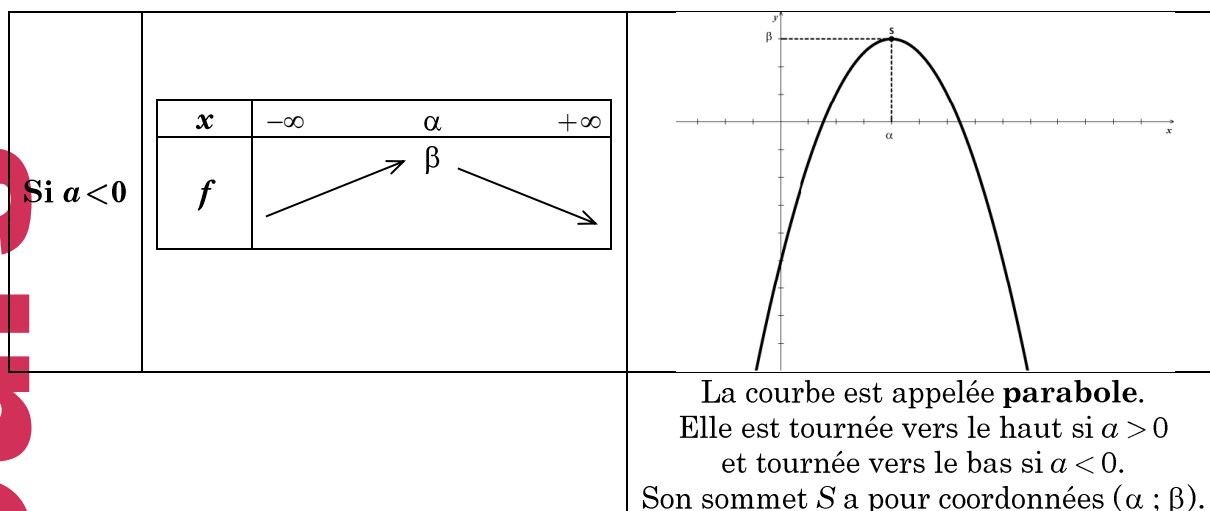
$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

On appelle $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Tableau de variations

Courbe représentative





X

Exercices 5, 6

2. EQUATIONS DU SECOND DEGRE

2A. Position du problème

Résoudre une équation du 2nd degré $ax^2 + bx + c = 0$, c'est déterminer toutes les valeurs possibles de l'inconnue x .

Vous savez déjà résoudre certaines équations du 2nd degré.

Voyons trois exemples :

Exemple 1 : Résoudre l'équation du 2nd degré $x^2 - 4 = 0$

$x^2 - 4 = 0$ équivaut à $x^2 = 4$ d'où $x = -2$ ou $x = 2$.

Les solutions de l'équation $x^2 - 4 = 0$ sont donc -2 et 2.

Exemple 2 : Résoudre l'équation du 2nd degré $x^2 + 2x = 0$

$x^2 + 2x = 0$ équivaut à $x(x+2) = 0$.

C'est-à-dire $x = 0$ ou $x + 2 = 0$.

Soit $x = 0$ ou $x = -2$.

↳ On a factorisé par x

↳ Règle sur un produit de facteurs nul

Les solutions de l'équation $x^2 + 2x = 0$ sont donc -2 et 0.

Exemple 3 : Résoudre l'équation du 2nd degré $x^2 + 6x + 9 = 0$

$x^2 + 6x + 9 = 0$ équivaut à $(x+3)^2 = 0$

↳ On reconnaît l'identité remarquable

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

C'est-à-dire $x + 3 = 0$.

Soit $x = -3$.

La solution de l'équation $x^2 + 6x + 9 = 0$ est donc -3.

Ce qu'on désire maintenant mettre en place, c'est une méthode générale et systématique pour résoudre de manière identique toutes les équations du second degré.

Cette méthode est la **méthode dite "du discriminant"**.

2B. Discriminant

Définition 3 : On appelle **discriminant** d'un trinôme du 2nd degré ax^2+bx+c le nombre noté Δ et défini par

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

G

Δ se lit "delta"

Reprenons les trois exemples ci-dessus et calculons le discriminant Δ dans chaque cas :

	On détermine les valeurs des coefficients a , b et c .	On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$
Exemple 1 $x^2 - 4$	$a = 1$; $b = 0$ et $c = -4$	$\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 16$
Exemple 2 $x^2 + 2x = 0$	$a = 1$; $b = 2$ et $c = 0$	$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 0 = 4$
Exemple 3 $x^2 + 6x + 9 = 0$	$a = 1$; $b = 6$ et $c = 9$	$\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$

2C. Résultats

On montre que c'est le nombre Δ qui détermine de nombreux résultats concernant les polynômes du second degré. Ci-dessous, on présente les résultats concernant la résolution de l'équation du 2nd degré $ax^2+bx+c=0$ ainsi que les résultats concernant la forme factorisée d'un polynôme du 2nd degré.

Théorème 1 :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solution(s) de l'équation $ax^2+bx+c=0$	2 solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	1 solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$	Aucune solution réelle
Forme factorisée du trinôme ax^2+bx+c	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_0)^2$	Pas de forme factorisée

G

- Les résultats de ce tableau sont à connaître par cœur.
- Les nombres x_0 , x_1 et x_2 sont des valeurs de la variable x qui annulent le polynôme ax^2+bx+c . On appelle ces nombres des **racines** du polynôme.

Reprenons encore les trois trinômes étudiés au paragraphe 2A et appliquons-leur la méthode du discriminant.

	On détermine les valeurs des coefficients a , b et c .	Valeur de Δ	Solution(s) de l'équation $ax^2+bx+c=0$	Forme factorisée du trinôme ax^2+bx+c
Exemple 1 x^2-4	$a = 1$; $b = 0$ et $c = -4$	$\Delta = 16$	$\Delta > 0$ donc il y a 2 solutions x_1 et x_2 $x_1 = \frac{-0+\sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$ $x_2 = \frac{-0-\sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-4}{2} = -2$	$1(x-2)(x-(-2))$ soit $(x-2)(x+2)$

	On détermine les valeurs des coefficients a , b et c .	Valeur de Δ	Solution(s) de l'équation $ax^2+bx+c=0$	Forme factorisée du trinôme ax^2+bx+c
Exemple 2 $x^2+2x=0$	$a = 1$; $b = 2$ et $c = 0$	$\Delta = 4$	$\Delta > 0$ donc il y a 2 solutions x_1 et x_2 $x_1 = \frac{-2-\sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{-4}{2} = -2$ $x_2 = \frac{-2+\sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{0}{2} = 0$	$1(x-(-2))(x-0)$ soit $(x+2)x$

	On détermine les valeurs des coefficients a , b et c .	Valeur de Δ	Solution(s) de l'équation $ax^2+bx+c=0$	Forme factorisée du trinôme ax^2+bx+c
Exemple 3 $x^2+6x+9=0$	$a = 1$; $b = 6$ et $c = 9$	$\Delta = 0$	$\Delta = 0$ donc il y a une seule solution $x_0 = \frac{-6}{2 \times 1} = -3$	$1(x-(-3))^2$ soit $(x+3)^2$

G

- On remarque qu'on retrouve bien, pour les équations, les mêmes solutions que celles trouvées au paragraphe 2A.
- La méthode du discriminant, même si elle est toujours applicable, n'est pas forcément la plus rapide pour conclure : sur les trois exemples ci-dessus, les techniques de résolution des équations qui ont été utilisées au paragraphe 2A sont plus efficaces.
- Les solutions d'une équation sont souvent écrites sous la forme d'un ensemble qu'on appelle ensemble solution et qu'on note S . Pour l'exemple 3, on noterait que l'ensemble solution de l'équation $x^2+6x+9=0$ est $S = \{-3\}$.

X

Exercices 7, 8

Théorème 2 :

La somme des racines d'un trinôme est égale à $-\frac{b}{a}$

Le produit des racines d'un trinôme est égal à $\frac{c}{a}$

X

Exercice 9

3. RESOUDRE UNE INEQUATION DU SECOND DEGRE**3A. Position du problème**

On veut maintenant étendre la méthode du discriminant pour résoudre des inéquations du second degré, par exemple $7x^2 + 6x - 1 < 0$.

Résoudre cette inéquation, c'est chercher toutes les valeurs de l'inconnue x qui rendent le trinôme $7x^2 + 6x - 1$ inférieur ou égal à 0.

Il faudrait donc qu'on sache déterminer le signe de $7x^2 + 6x - 1$.

Et cela est possible avec la méthode du discriminant !

Ces résultats sont présentés dans le paragraphe suivant.

3B. Résultats

Le signe du discriminant Δ permet de déterminer le signe de tous les trinômes du 2nd degré, comme le précise le théorème ci-après.

Théorème 3 :

	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$\Delta > 0 :$	Signe de $ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe de $-a$	Signe de a
	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	
$\Delta = 0 :$	Signe de $ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe de a	
	x	$-\infty$	$+\infty$		
$\Delta < 0 :$	Signe de $ax^2 + bx + c$	Signe de a			

G

- Dans ce théorème, les notations Δ , x_0 , x_1 et x_2 correspondent à celles qui ont été introduites au paragraphe 2.
- Dans les résultats du théorème 2, on a supposé que $x_1 < x_2$ mais dans la pratique, il faut classer les nombres x_1 et x_2 dans le tableau en respectant leur ordre.
- On peut synthétiser ce théorème en retenant la phrase suivante :
"un trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de coefficient a sauf entre les racines lorsqu'il en a".

Exemple 1 : Résoudre l'inéquation du 2nd degré $7x^2+6x-1 \leq 0$

1^{ère} étape : on identifie les coefficients a , b et c .

Ici, les coefficients du trinôme $7x^2+6x-1$ sont : $a = 7$, $b = 6$ et $c = -1$.

2^{ème} étape : on calcule le discriminant Δ .

Par définition, $\Delta = b^2 - 4ac$ donc ici $\Delta = 6^2 - 4 \times 7 \times (-1) = 64$.

3^{ème} étape : on calcule, si elles existent, les racines x_1 et x_2 ou x_0 .

Ici, $\Delta > 0$ donc les racines sont : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{64}}{2 \times 7} = \frac{-14}{14} = -1$

et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{64}}{2 \times 7} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$.

4^{ème} étape : on dresse le tableau de signes à l'aide du théorème 2.

Pour le trinôme $7x^2+6x-1$, le coefficient a est positif donc, selon le théorème 2, on peut résumer le signe de $7x^2+6x-1$ dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{7}$	$+\infty$	
Signe de $7x^2+6x-1$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

5^{ème} étape : on isole du tableau de signes les valeurs de x correspondant à l'inéquation.

Ici, on cherche à résoudre l'inéquation $7x^2+6x-1 < 0$ c'est-à-dire qu'on cherche les valeurs de x pour lesquelles le trinôme $7x^2+6x-1$ est nul ou négatif.

Finalement, $7x^2+6x-1 \leq 0$ pour $x \in \left[-1 ; \frac{1}{7}\right]$.

On note que cette inéquation a pour ensemble solution $S = \left[-1 ; \frac{1}{7}\right]$.

Exemple 2 : Résoudre l'inéquation du 2nd degré $x^2+8x+16 > 0$.

1^{ère} étape : on identifie les coefficients a , b et c .

Ici, les coefficients du trinôme $x^2+8x+16$ sont : $a = 1$, $b = 8$ et $c = 16$.

2^{ème} étape : on calcule le discriminant Δ .

Par définition, $\Delta = b^2 - 4ac$ donc ici $\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 16 = 64 - 64 = 0$.

3^{ème} étape : on calcule, si elles existent, les racines x_1 et x_2 ou x_0 .

Ici, $\Delta = 0$ donc la racine est : $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \times 1} = -4$

4^{ème} étape : on dresse le tableau de signes à l'aide du théorème 2.

Pour le trinôme $x^2+8x+16$, le coefficient a est positif donc, selon le théorème 2, on peut résumer le signe de $x^2+8x+16$ dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
Signe de $x^2+8x+16$	+	0	+

5^{ème} étape : on isole du tableau de signes les valeurs de x correspondant à l'inéquation.

Ici, on cherche à résoudre l'inéquation $x^2+8x+16 > 0$ c'est-à-dire qu'on cherche les valeurs de x pour lesquelles le trinôme $x^2+8x+16$ est strictement positif.

Finalement, $x^2+8x+16 > 0$ pour $x \in]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$

On note que cette inéquation a pour ensemble solution $S =]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$

Il faut exclure la valeur 4 car pour $x = 4$, le trinôme vaut 0 et n'est donc pas strictement positif.

G

• Cette inéquation $x^2+8x+16 > 0$ ne nécessitait pas d'utiliser la méthode du discriminant. En effet, on pouvait remarquer que $x^2+8x+16$ est le développement de $(x+4)^2$: $(x+4)^2 = x^2+8x+16$ car on sait que $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

Ainsi, résoudre $x^2+8x+16 > 0$ équivaut à résoudre $(x+4)^2 > 0$.

Et puisque $(x+4)^2$ est un carré, c'est un nombre toujours strictement positif sauf pour $x = -4$ où $(x+4)^2$ vaut 0.

En définitive, $(x+4)^2 > 0$ pour $x \in]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$

• Il est donc important de retenir que la méthode basée sur le discriminant n'est pas toujours la plus rapide...

χ

Exercices 10, 11, 12

EXERCICES AUTO-CORRECTIFS

-- QCM BILAN --

Pour chaque affirmation, il y a une seule réponse correcte parmi les trois propositions.
Après avoir répondu à ce questionnaire, vérifiez vos réponses.

Si vous avez au moins 5 bonnes réponses, vous pouvez passer aux exercices suivants, sinon il faut revoir attentivement la partie cours.

1. Le trinôme du 2nd degré $x^2 - 7$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

☐ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -7 \\ c = 0 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -7 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -7 \end{cases}$

2. La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x - 4$ est :

☐ Une parabole tournée vers le bas

☐ Une droite

☐ Une parabole tournée vers le haut

3. Le discriminant du trinôme $-x^2 - 6x + 7$ est :

☐ $\Delta = 8$

☐ $\Delta = -8$

☐ $\Delta = 64$

4. Le discriminant du trinôme $4 + 2x^2$ est :

☐ $\Delta = -12$

☐ $\Delta = 16$

☐ $\Delta = -32$

5. L'équation $x^2 - x - 6 = 0$ admet :

☐ Aucune solution réelle

☐ Une seule solution

☐ Deux solutions distinctes

6. Le polynôme $P(x) = 4x^2 - 12x + 8$:

☐ Ne possède aucune racine réelle

☐ Possède une seule racine réelle

☐ Possède deux racines réelles

7. L'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ a pour ensemble solution :

☐ $S = \emptyset$

☐ $S = \{-3; 1\}$

☐ $S = \{-1; 3\}$

8. Le trinôme $x^2 + 4x + 3$:

☐ Est négatif sur $\mathbb{R}$
☐ Est positif sur $\mathbb{R}$
☐ Change de signe sur $\mathbb{R}$

9. L'inéquation $2x^2 + x + 1 \leq 0$ a pour ensemble solution :

☐ $S = \mathbb{R}$

☐ $S = \emptyset$

☐ $S = \left[-1; \frac{1}{2}\right]$

-- EXERCICES D'APPLICATION --

Exercice 1

Les expressions suivantes sont-elles des polynômes du 2nd degré ?

1) $A = x^2 + 8x - 12$

2) $B = 5x + 1 - x^2$

3) $C = -6x + 3$

4) $D = (x-1)(x+2)$

5) $E = (x-1)^2$

6) $F = (x+1)(x-3)(x+2)$

Exercice 2

Ecrire les polynômes du 2nd degré suivants sous forme développée.

1) $A(x) = (2x-1)^2$

2) $B(x) = (x-3)(x+1)$

3) $C(x) = (x+2)^2$

Exercice 3

Ecrire les trinômes suivants sous forme factorisée.

On utilisera la technique de recherche d'un facteur commun ou une identité remarquable.

1) $A = 5x + 1 + (5x+1)(x-3)$

2) $B = (3x+2)(x+3) + (3x+2)^2$

Exercice 4

Ecrire les polynômes du 2nd degré suivants sous forme canonique.

1) $A(x) = x^2 + 2x + 3$

2) $B(x) = x^2 - 4x + 5$

3) $C(x) = 2x^2 + 4x + 6$

4) $D(x) = 5x^2 - 10x - 15$

Exercice 5

On considère la fonction polynôme du 2nd degré suivante :

$$f(x) = x^2 + 4x + 3.$$

1) Ecrire $f(x)$ sous forme canonique.

2) Donner le tableau de variations de f .

3) On appelle P la parabole représentant le trinôme f dans un repère orthogonal.

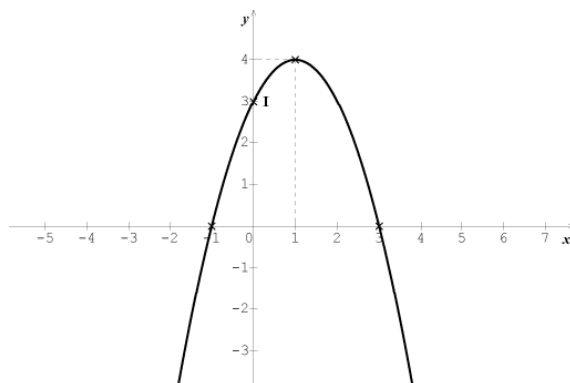
a) La parabole P est-elle tournée vers le haut ou vers le bas ?

b) Donner les coordonnées du sommet S de cette parabole.

Exercice 6

On considère la parabole ci-dessous qui est la représentation graphique d'une fonction polynôme du 2nd degré de forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$



- 1) Lire graphiquement les valeurs de α et β .
- 2) En utilisant les coordonnées du point I , calculer la valeur du coefficient a .
- 3) Donner la forme canonique de f puis la forme développée de f .
- 4) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ puis, sans calcul, donner une forme factorisée de f .

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (le calcul du discriminant n'est pas toujours nécessaire).

1) $2x^2 - x - 1 = 0$

2) $3x^2 + 29 = 0$

3) $x^2 - x + 6 = 0$

4) $x^2 - 18x + 81 = 0$

5) $x^2 - 7x = 0$

6) $3x^2 + 4x - 1 = 0$

Exercice 8

Soit le polynôme du 2nd degré P défini par $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$.

- 1) Déterminer les racines du polynôme P .
- 2) En déduire une forme factorisée de $P(x)$.

Exercice 9

Déterminer tous les réels, s'il en existe, dont la somme est égale à 5 et le produit à -14

Exercice 10

Dresser les tableaux de signes des trinômes suivants :

1) $A(x) = 2x^2 - 5x + 7$

2) $B(x) = -4x^2 - 11x + 3$

3) $C(x) = -x^2 + 6x - 9$

Exercice 11

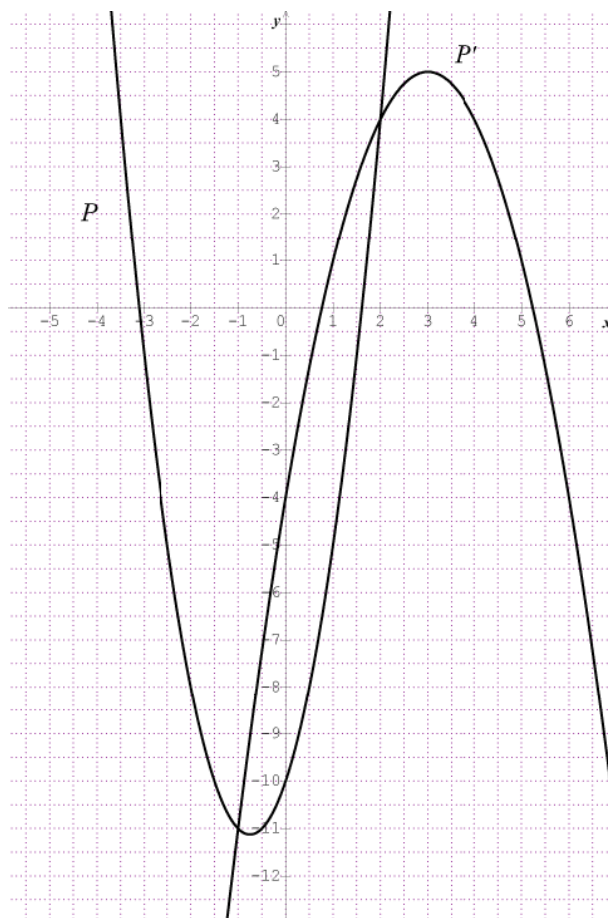
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 8 > 0$

2) $x^2 + 3x - 5 < x + 4$

Exercice 12

On considère f et g deux fonctions polynômes du 2nd degré dont les représentations graphiques respectivement notées P et P' sont données ci-après :



- 1) Résoudre graphiquement $f(x) \leq g(x)$.
- 2) On admet que les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

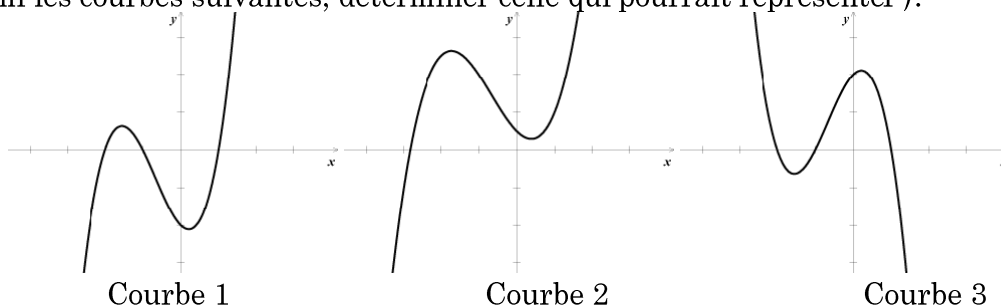
$$f(x) = 2x^2 + 3x - 10 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 + 6x - 4.$$
 Résoudre algébriquement $f(x) \leq g(x)$.

-- EXERCICES DE SYNTHÈSE --**Exercice 13**

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

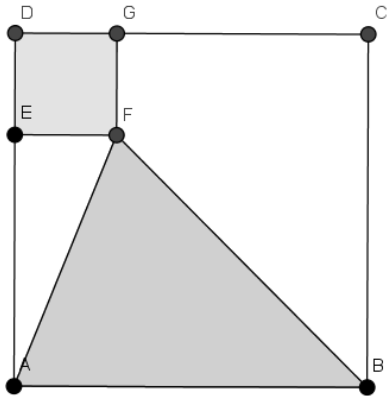
- 1) Montrer que $x = 1$ est une solution de l'équation $f(x) = 0$.
- 2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = (x-1)(x^2 + 3x + 2).$$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
- 4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > 0$.
- 5) Parmi les courbes suivantes, déterminer celle qui pourrait représenter f .



Exercice 14

$ABCD$ est un carré de côté 10cm, E est un point du segment $[AD]$, G est un point du segment $[CD]$ et $DEFG$ est un carré.



On note $DE = x$.
Déterminer la ou les valeurs de x pour que l'aire du carré $DEFG$ soit égale à l'aire du triangle BAF .

-- ALGORITHMIQUE --

Exercice 15

Les deux algorithmes ci-dessous ont été écrits par Marina et Arthur :

Marina	Arthur
Entrée des données le nombre x	Entrée des données le nombre x
Traitement des données $a \leftarrow x + 3$ $a \leftarrow a^2$ $a \leftarrow a - 1$	Traitement des données $a \leftarrow x + 6$ $a \leftarrow a \times x$ $a \leftarrow a + 8$
Sortie affichage du nombre a	Sortie affichage du nombre a

1) a) Compléter le tableau suivant :

Entrée	Sortie de Marina	Sortie d'Arthur
2		
-5		
$\frac{1}{2}$		

b) Que peut-on conjecturer ? Démontrer-le.

2) a) Marina et Arthur ont obtenu respectivement les nombres -1 et 8 en sortie. Retrouver les nombres x qu'ils ont utilisés en entrée.
b) Peuvent-ils obtenir en sortie le nombre -2 ? Justifier.

CORRECTION DES EXERCICES

-- QCM BILAN --

1) b) Le trinôme $x^2 - 7$ peut être réécrit sous la forme $x^2 + 0x - 7$.

Il est donc de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -7 \end{cases}$.

2) a) La fonction f est un polynôme du 2nd degré donc sa courbe représentative est une parabole. De plus, cette parabole est tournée vers le bas car le coefficient du terme de degré 2 est négatif.

3) c) Le trinôme $-x^2 - 6x + 7$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \\ c = 7 \end{cases}$.

Par définition, le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Donc ici, on a $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-1) \times 7 = 36 + 28 = 64$.

4) c) Le trinôme $4 + 2x^2$ peut être réécrit sous la forme $2x^2 + 0x + 4$.

Il est donc de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$.

Par définition, le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Donc ici, on a $\Delta = 0^2 - 4 \times 2 \times 4 = 0 - 32 = -32$.

5) c) L'équation $x^2 - x - 6 = 0$ est une équation du 2nd degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$

avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{cases}$.

On a alors $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$.

Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes.

6) c) Le polynôme défini par $P(x) = 4x^2 - 12x + 8$ est un polynôme du 2nd degré de la forme ax^2

$+ bx + c$ avec $\begin{cases} a = 4 \\ b = -12 \\ c = 8 \end{cases}$.

On a alors $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 8 = 144 - 128 = 16$.

Puisque $\Delta > 0$, l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions ou autrement dit le polynôme P admet deux racines réelles.

7) c) L'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ est une équation du 2nd degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$

avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$.

On a alors $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$.

Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 avec :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2 - 4}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2 + 4}{2} = 3.$$

L'ensemble solution S de l'équation est donc $S = \{-1 ; 3\}$.

8) c) Le trinôme $x^2 + 4x + 3$ a 2 racines car $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$
Donc il change de signe sur $\mathbb{R}$

9) b) L'expression $2x^2 + x + 1$ est un polynôme du 2nd degré avec $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

Résoudre l'inéquation $2x^2 + x + 1 \leq 0$ revient à chercher les valeurs de x pour lesquelles le polynôme $2x^2 + x + 1$ est nul ou négatif.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 - 8 = -7$.

Puisque $\Delta < 0$, le polynôme défini par $2x^2 + x + 1$ n'a pas de racine réelle.

Son signe est alors donné par la règle du cours : il est toujours du signe du coefficient $a = 2$ ce qui signifie qu'il est toujours strictement positif.

Ainsi, il n'existe aucune valeur de x pour laquelle $2x^2 + x + 1 \leq 0$.

L'ensemble solution de cette inéquation est l'ensemble vide : $S = \emptyset$.

Exercice 1

On rappelle qu'un polynôme du 2nd degré est une expression de la forme :
 $ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels et $a \neq 0$.

1) $A = x^2 + 8x - 12$

A est bien de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = 8 \\ c = -12 \end{cases}$

donc A est un polynôme du 2nd degré.

2) $B = 5x + 1 - x^2$.

On peut réécrire B en ordonnant les termes : $B = -x^2 + 5x + 1$.

B est bien de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = 1 \end{cases}$

donc B est un polynôme du 2nd degré.

3) $C = -6x + 3$.

On peut écrire $C = 0x^2 - 6x + 3$.

Le coefficient du terme de degré 2 vaut 0 donc C n'est pas un polynôme du 2nd degré.

4) $D = (x - 1)(x + 2)$.

En développant D , on obtient : $D = x^2 + 2x - x - 2$ soit $D = x^2 + x - 2$.

D est bien de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$ donc D est un polynôme du 2nd degré.

5) $E = (x - 1)^2$.

En développant E à l'aide de l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, on peut réécrire E sous la forme : $E = x^2 - 2x + 1$

E est bien de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$ donc E est un polynôme du 2nd degré.

6) $F = (x + 1)(x - 3)(x + 2)$.

Il est ici inutile de développer complètement l'expression de F .

En effet, on s'aperçoit rapidement que ce développement donnerait un terme non nul de degré 3 à savoir x^3 .

F n'est donc pas de la forme ax^2+bx+c et par conséquent, F n'est pas un polynôme du 2nd degré.

Exercice 2

1) $A(x) = (2x-1)^2$.

On utilise l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Il vient alors : $A(x) = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$.

2) $B(x) = (x-3)(x+1)$.

On développe en utilisant les règles de distributivité.

Il vient alors : $B(x) = x^2 + x - 3x - 3$ soit $B(x) = x^2 - 2x - 3$.

3) $C(x) = (x+2)^2$.

On utilise l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Il vient alors : $C(x) = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2$ soit $C(x) = x^2 + 4x + 4$.

Exercice 3

1) $A = 5x+1+(5x+1)(x-3)$.

$5x+1$ est un facteur commun ; en effet, on a : $A = (5x+1) \times 1 + (5x+1)(x-3)$

Ainsi, on peut écrire : $A = (5x+1)[1+(x-3)]$ soit $A = (5x+1)(x-2)$.

2) $B = (3x+2)(x+3)+(3x+2)^2$.

$(3x+2)$ est un facteur commun ; en effet, on $B = (3x+2)(x+3)+(3x+2)(3x+2)$.

Ainsi, on peut écrire : $B = (3x+2)[(x+3)+(3x+2)]$ soit $B = (3x+2)(4x+5)$.

Exercice 4

Pour obtenir la forme canonique d'un polynôme du 2nd degré, on respecte les 2 étapes mises en place au paragraphe 1A :

1^{ère} étape : on factorise par le coefficient devant x^2

2^{ème} étape : on considère les termes de degré 2 et 1 comme le début du développement d'une identité remarquable

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

1) $A(x) = x^2 + 2x + 3$

→ **1^{ère} étape :**

Il faudrait ici factoriser par 1, ce qui revient en fait à laisser l'expression $A(x)$ inchangée.

→ **2^{ème} étape :**

x^2+2x est le début du développement de l'identité remarquable $(x+1)^2$.

En effet, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ et donc, on peut écrire $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$.

Le trinôme se réécrit donc $A(x) = (x+1)^2 - 1 + 3 = (x+1)^2 + 2$.

2) $B(x) = x^2 - 4x + 5$

→ **1^{ère} étape :**

Il faudrait ici factoriser par 1, ce qui revient en fait à laisser l'expression $B(x)$ inchangée.

→ **2^{ème} étape :**

x^2-4x est le début du développement de l'identité remarquable $(x-2)^2$.

En effet, $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ et donc, on peut écrire $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$.

Le trinôme se réécrit donc $B(x) = (x-2)^2 - 4 + 5 = (x-2)^2 + 1$.

3) $C(x) = 2x^2 + 4x + 6$

→ 1^{ère} étape :

On factorise $C(x)$ par 2 : $C(x) = 2(x^2 + 2x + 3)$.

→ 2^{ème} étape :

$x^2 + 2x$ est le début du développement de l'identité remarquable $(x+1)^2$.

En effet, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ et donc, on peut écrire $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$.

Le trinôme se réécrit donc $C(x) = 2[(x+1)^2 - 1 + 3] = 2[(x+1)^2 + 2]$.

Soit $C(x) = 2(x+1)^2 + 4$.

4) $D(x) = 5x^2 - 10x - 15$

→ 1^{ère} étape :

On factorise $D(x)$ par 5 : $D(x) = 5(x^2 - 2x - 3)$.

→ 2^{ème} étape :

$x^2 - 2x$ est le début du développement de l'identité remarquable $(x-1)^2$.

En effet, $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ et donc, on peut écrire $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$.

Le trinôme se réécrit donc $D(x) = 5[(x-1)^2 - 1 - 3] = 5[(x-1)^2 - 4]$.

Soit $D(x) = 5(x-1)^2 - 20$.

Exercice 5

1) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

→ 1^{ère} étape :

Il faudrait ici factoriser par 1, ce qui revient en fait à laisser l'expression $f(x)$ inchangée.

→ 2^{ème} étape :

$x^2 + 4x$ est le début du développement de l'identité remarquable $(x+2)^2$.

En effet, $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ et donc, on peut écrire $x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$.

Le trinôme se réécrit donc $f(x) = (x+2)^2 - 4 + 3 = (x+2)^2 - 1$.

2)

Pour obtenir le tableau de variations d'un polynôme du 2nd degré, on utilise les résultats de cours du paragraphe 1C.

Pour cela, le polynôme doit être écrit sous forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Il faut ensuite identifier la valeur des coefficients a , α et β car les résultats dépendent de ces coefficients.

La forme canonique a été obtenue à la question précédente : $f(x) = (x+2)^2 - 1$.

$$a = 1$$

En identifiant avec l'écriture $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, on remarque que $\alpha = -2$.

$$\beta = -1$$

On peut alors dresser le tableau de variations à l'aide du résultat du paragraphe 1C, en sachant qu'ici nous sommes dans le cas $a > 0$.

On obtient :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f			

3)

Le cours (paragraphe 1C) nous apprend que :

La courbe représentative d'un trinôme est appelée **parabole**.

Elle est tournée vers le haut si $a > 0$ et tournée vers le bas si $a < 0$.

Son sommet S a pour coordonnées $(\alpha ; \beta)$ où α et β sont les paramètres qui apparaissent dans la forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

a) Ici $a = 1 > 0$ donc la parabole P est tournée vers le haut.

b) Ici, $\alpha = -2$ et $\beta = -1$ donc le sommet S de la parabole est $S(-2 ; -1)$.

Remarque : ces coordonnées apparaissent également dans le tableau de variations.

Exercice 6

1) Selon le cours, on sait que α et β sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du sommet S de la parabole. On lit alors sur le graphique : $\alpha = 1$ et $\beta = 4$.

2) Puisque $\alpha = 1$ et $\beta = 4$, la forme canonique peut être réécrite sous la forme :

$$f(x) = a(x - 1)^2 + 4.$$

Graphiquement, on lit que les coordonnées du point I sont $(0 ; 3)$.

Le point I appartenant à la parabole, on a $f(0) = 3$ soit $a(0 - 1)^2 + 4 = 3$.

D'où $a + 4 = 3$ ce qui donne $a = -1$.

Remarque : on s'assure que trouver une valeur de a négative est cohérent avec l'orientation de la parabole ; ici, la parabole est tournée vers le bas donc une valeur négative pour a est cohérente.

3) On sait que $a = -1$, $\alpha = 1$ et $\beta = 4$ donc la forme canonique de f est :

$$f(x) = -(x - 1)^2 + 4.$$

Pour obtenir la forme développée, on développe $(x - 1)^2$ à l'aide de l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Il vient alors : $f(x) = -(x^2 - 2x + 1) + 4$.

La forme développée de f est donc :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3.$$

4) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses.

On lit : $x = -1$ et $x = 3$.

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$.

Selon le paragraphe 2C du cours, la forme factorisée du trinôme $ax^2 + bx + c$ est :

$$a(x - x_1)(x - x_2) \text{ lorsque } \Delta > 0$$

où x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Ici, on sait que $\Delta > 0$ car l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$.

Et puisque $a = -1$, une forme factorisée de f est :

$$f(x) = -(x + 1)(x - 3).$$

Exercice 7

Pour résoudre une équation du 2nd degré $ax^2 + bx + c = 0$, on peut utiliser la méthode du discriminant Δ :

- On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$
- En fonction du signe de Δ , on connaît le nombre et la valeur des solutions : voir paragraphe 2C du cours

Mais dans certains cas, il est plus rapide de résoudre l'équation sans utiliser la méthode du discriminant. On utilise alors des outils mathématiques comme : identités remarquables, règle concernant un produit de facteurs nul, ...

1) $2x^2 - x - 1 = 0$.

Les coefficients a , b et c de ce trinôme sont $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$.

Le discriminant est alors : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$.

Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 avec :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \times a} = \frac{1 - \sqrt{9}}{2 \times 2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a} = \frac{1 + \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1.$$

L'ensemble solution de cette équation est donc $S = \left\{ -\frac{1}{2} ; 1 \right\}$.

2) $3x^2 + 29 = 0$.

On remarque que cette équation du 2nd degré n'est pas complète ; en effet le terme en x n'apparaît pas.

Dans ce cas, il n'est pas utile d'utiliser la méthode du discriminant.

En effet, on peut écrire :

$$3x^2 + 29 = 0 \text{ donc } x^2 = -\frac{29}{3}.$$

Or on sait que tout nombre réel élevé au carré est positif ou nul donc il n'existe pas de réel x tel que $x^2 = -\frac{29}{3}$ car $-\frac{29}{3}$ est strictement négatif.

L'équation n'admet donc pas de solution ; on dit que l'ensemble solution est vide et on note $S = \emptyset$.

3) $x^2 - x + 6 = 0$.

Les coefficients a , b et c de ce trinôme sont $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 6 \end{cases}$.

Le discriminant est alors : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 - 24 = -23$.

Puisque $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution réelle.

L'équation n'admet donc pas de solution ; on dit que l'ensemble solution est vide et on note $S = \emptyset$.

4) $x^2 - 18x + 81 = 0$.

On pourrait ici bien évidemment utiliser la méthode du discriminant mais on peut aller plus vite en remarquant que $x^2 - 18x + 81$ est le développement de $(x - 9)^2$.

En effet, en utilisant l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, il vient :

$$(x - 9)^2 = x^2 - 2 \times x \times 9 + 9^2 = x^2 - 18x + 81.$$

Ainsi, on a : $x^2 - 18x + 81 = 0 \Leftrightarrow (x - 9)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 9$.

L'équation admet donc une seule solution $x_0 = 9$.

On note $S = \{9\}$.

5) $x^2 - 7x = 0$.

On remarque que cette équation du 2nd degré n'est pas complète ; en effet le terme constant n'apparaît pas.

Dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'utiliser la méthode du discriminant.

En effet, on peut factoriser $x^2 - 7x$ par x ce qui donne : $x^2 - 7x = x(x - 7)$.

Ainsi, il vient : $x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(x - 7) = 0$.

Or un produit de facteurs est nul si et seulement si, un des facteurs est nul.

Donc $x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 7$.

L'équation admet donc deux solutions : $x_1 = 0$ et $x_2 = 7$.

On note $S = \{0 ; 7\}$.

6) $3x^2 + 4x - 1 = 0$.

Les coefficients a , b et c de ce trinôme sont $\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases}$.

Le discriminant est alors : $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 + 12 = 28$.

Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 avec :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \times a} = \frac{-4 - \sqrt{28}}{2 \times 3} = \frac{-4 - 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-2 - \sqrt{7}}{3}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a} = \frac{-4 + \sqrt{28}}{2 \times 3} = \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}.$$

L'ensemble solution de cette équation est donc $S = \left\{ \frac{-2 - \sqrt{7}}{3} ; \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \right\}$.

Exercice 8

1)

Selon le paragraphe 2C, une racine d'un polynôme P est une solution de l'équation $P(x) = 0$ donc déterminer les racines du polynôme P revient à résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Les coefficients a , b et c du trinôme $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$ sont $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = -6 \end{cases}$.

Le discriminant est alors : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-6) = 4 + 12 = 16 > 0$.

Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 avec :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \times a} = \frac{2 - \sqrt{16}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{2 - 4}{1} = -2$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a} = \frac{2 + \sqrt{16}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{2 + 4}{1} = 6.$$

Les racines du polynôme P sont donc -2 et 6 .

2)

Selon le paragraphe 2C du cours, la forme factorisée du trinôme $ax^2 + bx + c$ est :

$$a(x - x_1)(x - x_2) \text{ lorsque } \Delta > 0$$

où x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Ici, on sait que $\Delta > 0$ car l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = -2$ et $x_2 = 6$.

Et puisque $a = \frac{1}{2}$, la forme factorisée de P est :

$$P(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-6).$$

Exercice 9

Cela revient à résoudre le système de 2 équations à 2 inconnues x et y

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ x(5-x)=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ 5x-x^2=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ x^2-5x-14=0 \end{cases}$$

$$x^2-5x-14=0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-14) = 16 + 12 = 81.$$

Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 avec :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \times a} = \frac{5 - \sqrt{81}}{2} = \frac{5-9}{2} = -2$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a} = \frac{5 + \sqrt{81}}{2} = \frac{5+9}{2} = 7.$$

$$y = 5 - (-2) = 7 \text{ ou } y = 5 - 7 = -2$$

Ainsi, les couples $(-2 ; 7)$ et $(7 ; -2)$ vérifient le système

Exercice 10

Pour obtenir le signe d'un polynôme du 2nd degré $ax^2 + bx + c$, on peut utiliser la méthode du discriminant Δ qu'on peut retenir de la manière suivante :

"un trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe du coefficient a sauf entre les racines (lorsqu'il en a)"

1) $A(x) = 2x^2 - 5x + 7.$

Utilisons la méthode du discriminant.

$$\text{On a : } \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7 = 25 - 56 = -31.$$

On remarque que $\Delta < 0$ donc le trinôme $A(x)$ n'a pas de racine.

On en déduit que $A(x)$ est toujours du signe du coefficient $a = 2$ ce qui signifie que $A(x)$ est toujours strictement positif.

On résume cela dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $A(x)$	+	

2) $B(x) = -4x^2 - 11x + 3.$

Utilisons la méthode du discriminant.

$$\text{On a : } \Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \times (-4) \times 3 = 121 + 48 = 169.$$

On remarque que $\Delta > 0$ donc le trinôme $B(x)$ possède deux racines x_1 et x_2 avec :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11 - \sqrt{169}}{2 \times (-4)} = \frac{11 - 13}{-8} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11 + \sqrt{169}}{2 \times (-4)} = \frac{11 + 13}{-8} = \frac{24}{-8} = -3.$$

On utilise ensuite la règle : " le trinôme $B(x) = -4x^2 - 11x + 3$ est toujours du signe du coefficient $a = -4$ donc toujours négatif, sauf entre les racines -3 et $\frac{1}{4}$."

On résume le signe dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
Signe de $B(x)$	$-$	0	$+$	$+$

3) $C(x) = -x^2 + 6x - 9$.

Utilisons la méthode du discriminant.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = 36 - 36 = 0$.

On remarque que $\Delta = 0$ donc le trinôme $C(x)$ admet une seule racine x_0 avec :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \times (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

On utilise ensuite la règle : " le trinôme $C(x) = -x^2 + 6x - 9$ est toujours du signe du coefficient $a = -1$ donc toujours négatif, sauf pour la racine 3".

On résume le signe dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Signe de $C(x)$	$-$	0	$-$

Remarque : il n'était pas nécessaire d'utiliser la méthode du discriminant.

En effet, on pouvait constater que $C(x) = -(x^2 - 6x + 9) = -(x - 3)^2$.

Or $(x - 3)^2$ est nul pour $x = 3$ et strictement positif pour tout $x \neq 3$.

Donc $C(x) = -(x - 3)^2$ est nul pour $x = 3$ et strictement négatif pour tout $x \neq 3$.

Exercice 11

Pour résoudre une inéquation du 2nd degré, on raisonne en 2 étapes :

- On dresse le tableau de signes du trinôme du 2nd degré (cf exercice précédent)
- On isole du tableau de signes les valeurs de x qui correspondent au signe voulu du trinôme

1) $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 8 > 0$.

Soit $A(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 8$.

Résoudre l'inéquation $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 8 > 0$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le trinôme A est strictement positif.

Dressons le tableau de signes du trinôme A en utilisant la méthode du discriminant.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-8) = 9 + 16 = 25$.

On remarque que $\Delta > 0$ donc le trinôme $A(x)$ possède deux racines x_1 et x_2 avec :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{-3 - 5}{1} = -8 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{-3 + 5}{1} = 2.$$

On utilise ensuite la règle : " le trinôme $A(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 8$ est toujours du signe du coefficient $a = \frac{1}{2}$ donc toujours positif, sauf entre les racines -8 et 2 ".

On résume le signe dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	-8	2	$+\infty$
Signe de $A(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Puisque résoudre l'inéquation $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 8 > 0$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le trinôme A est strictement positif, on isole du tableau de signes les valeurs de x qui correspondent soit $x \in]-\infty; -8[\cup]2; +\infty[$

On conclut en notant que l'ensemble solution de cette inéquation est :

$$S =]-\infty; -8[\cup]2; +\infty[$$

2) $x^2 + 3x - 5 < x + 4$.

Il faut, dans un premier temps, ramener cette inéquation à la recherche du signe d'un polynôme du 2nd degré.

Pour cela, on va transposer dans le membre de gauche le terme $x + 4$:

$$x^2 + 3x - 5 < x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x - 5 - x - 4 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 9 < 0.$$

Soit $B(x) = x^2 + 2x - 9$.

Résoudre l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < x + 4$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le trinôme B est strictement négatif.

Dressons le tableau de signes du trinôme B en utilisant la méthode du discriminant.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 4 + 36 = 40$.

On remarque que $\Delta > 0$ donc le trinôme $B(x)$ possède deux racines x_1 et x_2 avec :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{40}}{2 \times 1} = \frac{-2 - 2\sqrt{10}}{2} = -1 - \sqrt{10}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{40}}{2 \times 1} = \frac{-2 + 2\sqrt{10}}{2} = -1 + \sqrt{10}.$$

On utilise ensuite la règle : " le trinôme $B(x) = x^2 + 2x - 9$ est toujours du signe du coefficient $a = 1$ donc toujours positif, sauf entre les racines $-1 - \sqrt{10}$ et $-1 + \sqrt{10}$ ".

On résume le signe dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
Signe de $B(x)$	+	0	-	0	+

Puisque résoudre l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < x + 4$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le trinôme B est strictement négatif, on isole du tableau de signes les valeurs de x qui correspondent soit $x \in]x_1; x_2[$.

On conclut en notant que l'ensemble solution de cette inéquation est :

$$S =]-1 - \sqrt{10}; -1 + \sqrt{10}[.$$

Exercice 12

1) Résoudre graphiquement $f(x) \leq g(x)$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles la parabole P est en-dessous de la parabole P' .

Sur le graphique, on lit que cela se produit pour les valeurs de x comprises entre -1 et 2 .

Graphiquement, on a donc $f(x) \leq g(x)$ pour $x \in [-1; 2]$.

2) On souhaite maintenant résoudre algébriquement $f(x) \leq g(x)$.

Cela revient à résoudre $2x^2 + 3x - 10 \leq -x^2 + 6x - 4$.

Il faut, dans un premier temps, ramener cette inéquation à la recherche du signe d'un polynôme du 2nd degré.

Pour cela, on va transposer dans le membre de gauche le terme $-x^2 + 6x - 4$:

$$2x^2 + 3x - 10 \leq -x^2 + 6x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 10 + x^2 - 6x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 6 \leq 0.$$

Soit $A(x) = 3x^2 - 3x - 6$.

Résoudre l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le trinôme A est négatif ou nul.

Dressons le tableau de signes du trinôme A en utilisant la méthode du discriminant.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-6) = 9 + 72 = 81$.

On remarque que $\Delta > 0$ donc le trinôme $A(x)$ possède deux racines x_1 et x_2 avec :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{81}}{2 \times 3} = \frac{3 - 9}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{81}}{2 \times 3} = \frac{3 + 9}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

On utilise ensuite la règle : " le trinôme $A(x) = 3x^2 - 3x - 6$ est toujours du signe du coefficient $a = 3$ donc toujours positif, sauf entre les racines -1 et 2 ".

On résume le signe dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
Signe de $B(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Puisque résoudre l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le trinôme B est négatif ou nul, on isole du tableau de signes les valeurs de x qui correspondent soit $x \in [-1 ; 2]$.

Remarque : on vérifie que la résolution algébrique donne les mêmes résultats que la résolution graphique.

-- EXERCICES DE SYNTHÈSE --

Exercice 13

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

1) On a $f(1) = 1^3 + 2 \times 1^2 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$.

Puisque $f(1) = 0$, on sait que $x = 1$ est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

2) Développons la forme factorisée donnée dans l'énoncé :

$$(x-1)(x^2+3x+2) = x^3+3x^2+2x-x^2-3x-2$$

$$(x-1)(x^2+3x-2) = x^3+2x^2-x-2$$

On remarque que le résultat de ce développement correspond à l'expression de $f(x)$.

On peut donc conclure que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x^2+3x+2)$.

3) On dispose désormais de deux formes possibles pour $f(x)$:

- la forme développée : $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$;

- une forme factorisée : $f(x) = (x-1)(x^2+3x+2)$.

Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, il nous faut choisir la forme factorisée car nous pourrions utiliser la règle d'un produit de facteurs nul.

Ainsi, on peut écrire :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+3x+2) = 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ ou } x^2+3x+2 = 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x^2+3x+2 = 0.$$

Résolvons à part l'équation $x^2+3x+2 = 0$:

Il s'agit d'une équation du 2nd degré du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$.

Utilisons la méthode du discriminant.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$.

On remarque que $\Delta > 0$ donc l'équation $x^2 + 3x + 2 = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 avec :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Ainsi, $x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = -1$.

En conclusion, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$ ou $x = -1$.

L'ensemble solution S de l'équation $f(x) = 0$ est donc $S = \{-2; -1; 1\}$.

4) On souhaite maintenant résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

L'idée est d'utiliser encore une fois la forme factorisée de $f(x)$.

En effet :

► On sait déterminer le signe du facteur $(x-1)$:

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1 ; x-1>0 \Leftrightarrow x>1 ; x-1<0 \Leftrightarrow x<1$$

► On sait déterminer le signe du facteur (x^2+3x+2) :

Il s'agit de déterminer le signe d'un polynôme du 2nd degré donc on peut utiliser la règle : "un trinôme ax^2+bx+c est toujours du signe du coefficient a sauf entre les racines (lorsqu'il en a)"

► On sait déterminer le signe du produit de ces deux facteurs en utilisant la règle donnant le signe d'un produit.

On résume tout cela dans le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+
x^2+3x+2	+	0	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	+

On en déduit que $f(x) > 0$ pour $x \in]-2; -1[\cup]1; +\infty[$.

5) Nous allons procéder par élimination.

La courbe représentative de la fonction f doit couper l'axe des abscisses trois fois car on sait, selon la question 3, que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions.

Nous pouvons donc écarter la courbe 2 car celle-ci ne coupe l'axe des abscisses qu'une seule fois.

Selon la question 4, $f(x) > 0$ pour $x \in]-2; -1[\cup]1; +\infty[$ donc la courbe représentative de f doit être située au-dessus de l'axe des abscisses pour $x \in]-2; -1[$ et pour $x \in]1; +\infty[$.

Nous pouvons donc éliminer la courbe 3.

Finalement, la seule courbe susceptible de représenter la fonction f est la courbe 1 car elle coupe l'axe des abscisses trois fois et est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x \in]-2; -1[$ et pour $x \in]1; +\infty[$.

Exercice 14

Déterminons l'aire du carré $DEFG$:

$$\mathcal{A}_{DEFG} = DE \times DG = x \times x = x^2$$

Déterminons l'aire du triangle BAF :

$$\mathcal{A}_{BAF} = \frac{AB \times EA}{2} = \frac{10 \times (10 - x)}{2} = \frac{100 - 10x}{2} = 50 - 5x.$$

Ainsi, $\mathcal{A}_{DEFG} = \mathcal{A}_{BAF} \Leftrightarrow x^2 = 50 - 5x \Leftrightarrow x^2 + 5x - 50 = 0$.

Le problème se ramène donc à la résolution de l'équation $x^2 + 5x - 50 = 0$.

Il s'agit d'une équation du 2nd degré du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = -50 \end{cases}$.

Utilisons la méthode du discriminant.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times (-50) = 25 + 200 = 225$.

On remarque que $\Delta > 0$ donc l'équation $x^2 + 5x - 50 = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 avec :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{225}}{2 \times 1} = \frac{-5 - 15}{2} = -10 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{225}}{2 \times 1} = \frac{-5 + 15}{2} = 5.$$

Ainsi, $x^2 + 5x - 50 = 0 \Leftrightarrow x = -10$ ou $x = 5$.

Mais nous devons écarter la valeur $x = -10$ car x représente une distance donc x doit être un nombre positif.

En définitive, l'aire du carré $DEFG$ est égale à l'aire du triangle BAF pour $x = 5$.

-- ALGORITHMIQUE --

Exercice 15

1)

a) Voici le tableau présentant les résultats :

Entrée	Sortie de Marina	Sortie d'Arthur
2	24	24
-5	3	3
$\frac{1}{2}$	$\frac{45}{4}$	$\frac{45}{4}$

b) Il semble que les deux algorithmes conduisent au même résultat.

Démontrons-le :

Soit x le nombre entré et intéressons-nous au contenu de la variable a à chaque étape de chacun des algorithmes.

	Contenu de la variable a
Marina	$x + 3 \rightarrow (x + 3)^2 \rightarrow (x + 3)^2 - 1$
Arthur	$x + 6 \rightarrow (x + 6)x \rightarrow (x + 6)x + 8$

Or, en utilisant l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, on peut écrire :

$$(x + 3)^2 - 1 = (x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2) - 1 = (x^2 + 6x + 9) - 1 = x^2 + 6x + 8.$$

$$\text{Et : } (x + 6)x + 8 = x^2 + 6x + 8.$$

Les deux algorithmes conduisent donc au même résultat et ce, quel que soit le nombre x entré.

2)

a) Puisque les deux algorithmes renvoient le même résultat, nous disposons de trois écritures différentes de la variable a en sortie :

- écriture 1 : $a = (x + 3)^2 - 1$
- écriture 2 : $a = (x + 6)x + 8$
- écriture 3 : $a = x^2 + 6x + 8$

Retrouver le nombre x correspondant au nombre -1 en sortie revient à résoudre $a = -1$.
Il est plus intéressant d'utiliser l'écriture 1 de a car cette écriture permettra une simplification des termes -1 :

$$(x+3)^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

Retrouver le nombre x correspondant au nombre 8 en sortie revient à résoudre $a = 8$.
Il est préférable d'utiliser l'écriture 2 de a car cette écriture, après une simplification par le terme 8 , se ramènera à un produit de facteurs nul :

$$(x+6)x + 8 = 8 \Leftrightarrow (x+6)x = 0 \Leftrightarrow x+6 = 0 \text{ ou } x = 0 \Leftrightarrow x = -6 \text{ ou } x = 0.$$

b) Savoir si on peut obtenir le nombre -2 en sortie revient à se demander s'il existe des valeurs de x telles que $a = -2$.

En utilisant l'écriture 1, cela revient à résoudre l'équation suivante :

$$(x+3)^2 - 1 = -2 \Leftrightarrow (x+3)^2 = -1.$$

Or $(x+3)^2$ est toujours positif donc il est impossible d'obtenir -2 en sortie de ces algorithmes.

DEVOIR N°1**Ce devoir est à envoyer à la correction****Exercice 1 (5,5 points)**Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 12x$.On note P sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- 1) Ecrire $f(x)$ sous forme canonique.
- 2) Dresser le tableau de variations de f .
- 3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de P avec l'axe des abscisses.
- 4) Déterminer une forme factorisée de $f(x)$.

Exercice 2 (4,5 points)

Résoudre les équations suivantes en utilisant la méthode la plus pertinente :

- 1) $x^2 - 3x + 2 = 0$
- 2) $3x^2 - 5x = 0$
- 3) $2x^2 + 7 = 0$

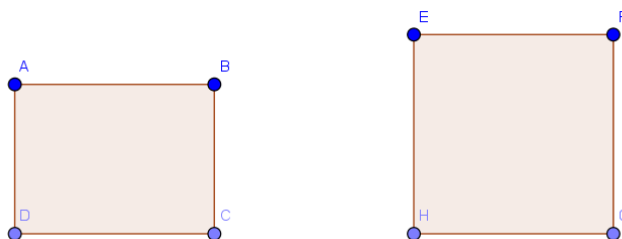
Exercice 3 (4 points)

Résoudre les inéquations suivantes :

- 1) $-6x^2 + 5x + 6 > 0$
- 2) $2x^2 \leq 7x - 5$

Exercice 4 (3 points)

- 1) Quelle valeur faut-il donner au réel m pour que l'équation $x^2 + 4x + m = 0$ ait une seule solution ?
- 2) Quelle est alors cette solution ?

Exercice 5 (3 points)On considère le rectangle $ABCD$ et le carré $EFGH$ ci-dessous.On pose $AB = x + 3$, $BC = x - 1$ et $EH = x$.Est-il possible de trouver une valeur de x telle que l'aire du rectangle soit double de l'aire du carré ?

La réponse devra être justifiée.